

平成 21 年 4 月 30 日現在

研究種目： 基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号： 19540057

研究課題名（和文） 生成的多項式に基づく数論の展開

研究課題名（英文） Development of Number Theory based on Generic Polynomials

研究代表者

三宅 克哉（MIYAKE, Katsuya）

早稲田大学・総合研究機構・教授

研究者番号：20023632

研究成果の概要：

非アーベル的現象の探索法を探って、一般次数対称群に対する生成的多項式の同型問題への方法を理論的に構築し、「特殊化」によって活用する手法を確立した。さらに5次までの可解群に対する生成的多項式に対して同型問題を越えた共有体問題への解答を与えた。また3次の場合の数論への展開を進展させ、古典的な2次体の類数問題への応用を深め、さらに8次巡回群に対する生成的多項式の有理数体上での「非存在」現象を解明した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学（細目番号：4101）

キーワード：(1) 生成的多項式 (2) 部分体問題 (3) 2次体の類数問題

(4) Cubic Thue equations (5) Hessian 曲線の捻り (6) 一般チルンハウス変換

(7) 4次生成的多項式 (8) 5次可解生成的多項式

### 1. 研究開始当初の背景

高木-Artin の類体論からの非アーベル的な展開に関しては、表現論からのアプローチである「Langlands 哲学」があり、また類数問題に踏み込んだ展開は岩澤理論によって著しい成功を収めてきた。しかし、非アーベル的な現象の発見、収集となるとまだまだ過小であり、健全な理論展開を支えるまでに至っていない。本研究代表者は (1) 非アーベル的な 3 次の生成多項式を用い、類数が 3 で割れる 2 次体とその不分岐巡回 3 次拡大をすべてパラメトライズすることに成功した。ここに「同型問題」、すなわち、二組のパラメータの値が同じ拡大を与える条件を求める問題が自然に現れ、その判別条件を書き下すことにも成功した。これに伴い、小松亨は 3 次生成的多項式における同型問題への自身の Kummer 降下に基づく手法を提示した。また、本研究代表者は (2) 3 次生成的多項式を用いた有理数体上の楕円曲線の数論と 3 次体との関わりについて試行的な検討を進め、発表を重ねてきた。

### 2. 研究の目的

(1) 3 次対称群についての生成的多項式の「同型問題」に関する諸結果をふまえて一般の次数の対称群の場合に対応できる枠組みを構成し、その証明を与える。(2) また  $n$  次対称群の「同型問題」に対して展開した (1) の枠組みのなかで具体的な分析を進め、特に  $n = 3, 4, 5$  の可解部分群全般に対する生成的多項式を統一的に書き下し、それらの「同型問題」への解答を与える。(3) 3 次生成的多項式に基づき、Hesse の楕円曲線族の 3 次体のガロア閉包上の捻りを構成し、通常の 2 次の捻りを含む相互関連を解明するとともに、ディオファントス問題への新しい展開を探る。(4) 3 次の場合に得られていた 2 次体の類数問題についての踏み込んだ分析を行い、従来の結果を深める。

### 3. 研究の方法

(1) まず本研究に重点的に使用するための計算機を購入し、数式処理、データ解析等に機能するように整える。さらに従来の準備段階の研究において集積してきたデータ等を集約する。また 5 次までのかなり一般的な多項式を計算機代数に依拠して扱うために、研究体制の実情に対応して絶えず計算機能を充実させる。(2) 定期的にセミナー形式による研究討議を行うとともに、日常的に e-mail を利用して情報・データを交換するとともに、関連するいくつかの研究集会において情報収集する際に本研究組織の一同が集まり、研究討議の機会を持つ。(3) 準備段

階を含めて得られた結果を適宜発表できるようにまとめ、発表の機会を積極的に捉えることによって、絶えず新しい情報の交換に努める。

### 4. 研究成果

(1) 本研究代表者と連携研究者の星は一般の次数の対称群についての生成的多項式と同型問題に対して理論的な方法論を構築した。これは一般 Tschirnhaus 変換と相対終結式を用いるもので、総合的な「数論ソフト」に組み込まれたガロア群の決定のためのアルゴリズムをかなり簡略化するのにも役立つ。さらに生成的多項式の「降下生成性」に踏み込み、問題を「部分体問題」、「共有体決定問題」と進化させ、一般 Tschirnhaus 変換と相対終結式を用いた枠組みを「特殊化」によって活用する手法を確定し、対称群やその自分自身との直積の部分群に対応する生成的多項式の統一的な取り扱いを可能にし、代数的数体の統制と分類に対する新しい手法を明示した。特に  $n$  次対称群 ( $2 \leq n \leq 5$ ) の可解部分群全般に対する生成的多項式についての「共有体決定問題」に明示的な回答を与えた。これは連携研究者の小松が 3 次の場合に自身のクンマー降下の理論を基礎にして指摘してきた研究成果の背景に潜んでいた枠組みを、研究代表者の同型問題への判定条件を基礎にして理論化したものである。

(2) さらに 3 次の生成的多項式の数論に踏み込み、種数 0 の代数曲線に対する Siegl の定理の応用として、代数的数体上でパラメータを代数的整数に限る場合に、同じ最小分解体を与えるパラメータの組が本質的には有限個に限る事を示した。また連携研究者の星は有理数体上で 3 次の生成的巡回多項式の数論を考察し、パラメータが整数である場合に、この同型問題とある種の新しいタイプの Thue 方程式系との緊密な関係があることを発見し、Diophantus 幾何学に関わる人たちから高い評価を受けた。また彼は 4 次の生成的巡回多項式についても同様な現象が見られそうな手がかりをつかんだ。

(3) 研究代表者は 3 次生成的多項式を用い、Hesse の楕円曲線族の 2, 3, 6 次の (代数曲線としての) 捻りを系統的に構成し、それらの相互関係を示し、Diophantus 幾何学的な成果を含めて正式な論文として発表した。

(ただし 6 次の場合には非可換ガロア体上での捻りに限る。) それぞれの捻りの全体は楕円曲面として提示されている。この結果は、当初国際研究会議において口頭で発表した際に、フランスにおける数論の一つの学派を

打ち立てた Waldschmid から興味を持って迎えられていた。

(4) 連携研究者の岸は3次二面体群の生成的多項式を応用した2次体の類数問題の本研究代表者との共同研究をさらに深め、特に3次の場合の応用として2次体の類数問題への新基軸にそった研究を進展させると共に、さらに5次の場合にも同様な展開を示し、類数が5で割れる虚2次体のある種の新たな無限族を構成した。

(5) また連携研究者の陸名は5次二面体群に対する Brumer の生成的多項式の研究を深め、ある楕円曲線のディオファントスの数論と関連させて成果を得た。さらに連携研究者の星および研究協力者の橋本喜一郎と共同して8次の特殊な場合の Noether 問題にも成果を上げ、有理数体上では8次巡回群に対する生成的多項式が存在しないというこの分野での古典的ともいえる結果を克服して踏み込んだ分析を果たし、この非存在の理由を明示的に提示するとともに、この場合にパラメトリックな方程式の構成についての基本的な手がかりを得た。

(6) 研究成果の発表については、4名の連携研究者によるものを合わせ、6種類の国際的な研究集会での6件に加え、日本数学会等の国内での研究集会で13件の口頭発表を行い、論文14編の公刊が決定している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 14 件)

1. Katsuya Miyake, Twists of Hessian Elliptic Curves and Cubic Fields, Annales Mathematiques Blaise Pascal, 査読有, 16 (2009), 121-139.

2. Akinari Hoshi and Katsuya Miyake, A note on the field isomorphism problem of  $X^3+sX+s$  and related cubic Thue equations, Special issue of Interdisciplinary of Information Sciences (IIS), 査読有, to appear; arXiv:0901.4831v1 [math.NT] <http://arxiv.org/abs/0901.4831>

3. Akinari Hoshi and Katsuya Miyake, On the field intersection problem of generic polynomials: a survey, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, to appear; arXiv:0804.4875v1 [math.NT] <http://arxiv.org/abs/0810.0382v1>

4. Akinari Hoshi and Katsuya Miyake, A geometric framework for the subfield problem of generic polynomials via Tschirnhausen transformation,

The Proceedings of The International Conference of Number Theory held at Harish-Chandra Research Institute, 査読有, to appear, arXiv:0710.0287v2 [math.NT] <http://arxiv.org/abs/0710.0287v2>

5. Yasuhiro Kishi, Note on the divisibility of the class number of certain imaginary quadratic fields, Glasgow Math. J. 査読有, 51 (2009), 187-191.

6. Toru Komatsu, Generalized Kummer theory and its applications, Annales Mathematiques Blaise Pascal, 査読有, 16 (2009), 97-108.

7. Toru Komatsu, Construction of cyclic number fields with prime degree and their Frobenius automorphisms, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, to appear.

8. K. Hashimoto, A. Hoshi, and Y. Rikuna, Noether's problem and  $\mathbb{Q}$ -generic polynomials for the normalizer of the 8-cycle in  $S_8$  and its subgroups, Mathematics of Computation, 査読有, 77 (2008), 1153-1183.

9. Yasuhiro Kishi, A new family of imaginary quadratic fields whose class number is divisible by five, J. Number Theory, 査読有, 128 (2008), 2450-2458.

10. Toru Komatsu, Arithmetic of the splitting field of Alexander polynomial, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, 17 (2008), 399-409.

11. Katsuya Miyake, Two Expositions on Arithmetic of Cubics, The Proceedings of the Fourth China-Japan Seminar ed. By S. Kanemitsu and J.-Y. Liu, World Scientific, 査読有, 2007, 136-154.

12. Katsuya Miyake, Teiji Takagi, Founder of the Japanese School of Modern Mathematics, Japan. Jour. of Math., 3rd Series, 査読有, 2 (2007), 151-164.

13. Akinari Hoshi and Katsuya Miyake, Tschirnhausen Transformation of a Cubic Generic Polynomial and a 2-dimensional Involutive Cremona Transformation, Proc. Japan Acad., 査読有, 83, Ser. A (2007), 21-26.

14. Toru Komatsu, Cyclic cubic field with explicit Artin symbols, Tokyo Jour. of Math. 査読有, 30 (2007), 169-178.

[学会発表](計 13 件)

1. Akinari Hoshi, On correspondence

between solutions of a parametric family of cubic Thue equations and isomorphism classes of simplest cubic fields, Diophantine Analysis and Related Fields 2009, 2009年3月2日, 日本大学.

2. Akinari Hoshi and Katsuya Miyake, On the field isomorphism problem of generic polynomials via formal Tschirnhausen transformation, 日韓整数論セミナー 2008, 2008年11月12日, 東北大学.

3. Yasuhiro Kishi, ある虚2次体のイデアル類群の3-rankについて, 日本数学会 2008年度秋期総合分科会, 2008年9月27日, 東京工業大学.

4. Yasuhiro Kishi, ある虚2次体の類数のn-divisibility, 日本数学会 2008年度秋期総合分科会, 2008年9月27日, 東京工業大学.

5. Akinari Hoshi and Katsuya Miyake, 生成的多項式の同型問題に対する考察, 日本数学会 2008年度秋期総合分科会, 2008年9月27日, 東京工業大学.

6. Yasuhiro Kishi, ある2次体のイデアル類群について, ガロア理論とその周辺 徳島 2008, 2008年9月10日, 徳島大学.

7. Akinari Hoshi and Katsuya Miyake, On the field isomorphism problem of generic polynomials via formal Tschirnhausen transformation, ガロア理論とその周辺 徳島 2008, 2008年9月9日, 徳島大学.

8. Akinari Hoshi and Katsuya Miyake, Some Diophantine problems arising from the isomorphism problem of generic polynomials, 第5回日中数論セミナー, 2008年8月27日, 近畿大学.

9. Akinari Hoshi, 生成的多項式の共通部分体問題に対する考察, 可換Banach環と関連分野研究集会(第77回米沢数学セミナー), 2008年7月2日, 山形大学.

10. Akinari Hoshi, On the field intersection problem of generic polynomials via resolvent polynomials, Foundations of Computational Mathematics (FoCM '08) WORKSHOP C4 Computational number theory, 2008年6月24日, 香港城市大学, 中国.

11. Katsuya Miyake, 生成的チルンハウス変換とその応用, 九州大学小研究集会, 2008年2月23日, 九州大学箱崎・理学部.

12. Toru Komatsu, Generic polynomials and their arithmetic properties, COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality, 2007年10月4日, 福岡リーセントホテル.

13. Akinari Hoshi, Cubic generic polynomials and some Cremona transformation, Seminar of Algebra, 2007年7月26日, CTS at Taiwan Univ.

#### 6. 研究組織

・(2007年度)

##### (1) 研究代表者

三宅 克哉 (MIYAKE KATSUYA)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号: 20023632

##### (2) 研究分担者

岸 康弘 (KISHI YASUHIRO)  
福岡教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 60380375

陸名 雄一 (RIKUNA YUICHI)  
早稲田大学・理工学術院・助教  
研究者番号: 10434309

星 明考 (HOSHI AKINARI)  
早稲田大学・教育・総合科学学術院・助手  
研究者番号: 50434262

小松 亨 (KOMATSU TORU)  
上智大学・理工学部・助教  
研究者番号: 10403974

・(2008年度)

##### (1) 研究代表者

三宅 克哉 (MIYAKE KATSUYA)  
早稲田大学・総合研究機構・教授  
研究者番号: 20023632

##### (2) 連携研究者

岸 康弘 (KISHI YASUHIRO)  
福岡教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 60380375

陸名 雄一 (RIKUNA YUICHI)  
早稲田大学・理工学術院・助教  
研究者番号: 10434309

星 明考 (HOSHI AKINARI)  
立教大学・理学部・助教  
研究者番号: 50434262

小松 亨 (KOMATSU TORU)  
上智大学・理工学部・助教  
研究者番号: 10403974