

平成22年6月18日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540060

研究課題名（和文） 可換代数学におけるネター一局所環の研究

研究課題名（英文） Study of Noetherian local rings in commutative algebra

研究代表者

西村 純一（NISHIMURA JUN-ICHI）

大阪電気通信大学・工学部・教授

研究者番号：00025488

研究成果の概要（和文）：不等標数ネター一局所環上 Big Cohen-Macaulay 加群の構成：H. Bass や M. Auslander 等によって問われたネター一局所環上有限生成加群に関する諸予想は、「ホモロジー予想」とも呼ばれ、可換代数学における基本的な重要問題として多くの研究がなされてきた。M. Hochster は「BigCohen-Macaulay 加群」の存在が「予想」を導くことを示し、等標数ネター一局所環上には Big Cohen-Macaulay 加群が存在することも証明した。我々は、不等標数ネター一局所環上にも Big Cohen-Macaulay 加群が構成できることを示した。

研究成果の概要（英文）：Construction of big Cohen-Macaulay modules over mixed characteristic local rings: The conjectures on finitely generated modules over Noetherian local rings asked by H. Bass and M. Auslander are called “Homological Conjectures”. Many commutative algebraists have studied on this subject. M. Hochster showed that the existence of big Cohen-Macaulay modules implies the conjectures and succeeded to show the existence over equal characteristic local rings. We have got the result over mixed characteristic local rings.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論

1. 研究開始当初の背景

H. Bass や M. Auslander 等によって問われたネター一局所環上有限生成加群に関する諸予想は「ホモロジー予想」とも呼ばれ、可換代

学における基本的な重要問題として今日まで多くの研究がなされてきた。

C. Peskine-L. Szpiro は、予想がネター一局所環上有限生成自由加群の複体の交叉予想から

導かれることを示し、標数正の体を含む場合の上記諸予想を解決した。

その後、M. Hochster は、ネター局所環のパラメーター系が正則列である、いわゆる「Big Cohen-Macaulay 加群」の存在が単項予想、直和因子予想や新交叉予想を導き、それらが Peskine-Szpiro の交叉予想を導くことを示した。そして、体を含むネター局所環上に Big Cohen-Macaulay 加群を構成し、等標数ネター局所環では上記予想がすべて成立することを示した。

それ以来、多くの研究者が不等標数ネター局所環上に Big Cohen-Macaulay 加群を構成しようと努力したが成功しなかった。

2. 研究の目的

我々は、不等標数ネター局所環上にも Big Cohen-Macaulay 加群が構成できることを示し、H. Bass や M. Auslander 等によって問われたネター局所環上有限生成加群に関する「ホモロジー予想」とも呼ばれる諸予想、さらに M. Hochster の単項予想、直和因子予想や新交叉予想を導き、Peskine-Szpiro の交叉予想をも導く。

3. 研究の方法

M. Hochster は Frobenius 写像の技法を巧妙に使い、正標数 p の体を含むネター局所環上の Big Cohen-Macaulay 加群の存在を示した。標数 0 の体を含むネター局所環については、退化 Modification を具体的に表現 (Hochster Observation) し、M. Artin による近似定理を用い正標数の場合に還元する標準的手順からその存在を示し、等標数ネター局所環上には Big Cohen-Macaulay 加群が存在することを証明した。

我々は、退化 Modification の base change, 完備局所環の構造定理・Witt 表現, Flenner の Bertini 定理, Frobenius 写像を利用し、退化 Modification の Hochster Observation を具体的に考察した。さらに、Tight closure の理論、特に test element 等も使い、不等標数ネター局所環上にも Big Cohen-Macaulay 加群が構成できることを示す。

4. 研究成果

我々は、上記方法により得た結果を論文名: Big Cohen-Macaulay Modules Over Mixed Characteristic Local Rings, としてまとめた。

即ち

命題 0.1. 不等標数ネター局所環上は Big Cohen-Macaulay 加群を持つ。

定理 0.2. すべてのネター局所環上は Big Cohen-Macaulay 加群を持つ。

1. Modifications and Base Changes.

1.1. 退化 Modification.

1.2. Base Change 1.

1.3. Base Change 2.

2. 密着閉包 (Tight Closures) と中国剰余定理.

定理 2.1. 密着閉包の基本性質.

2.2. 密着閉包と極小素イデアルによる剰余との関係に関する注意.

定理 2.3. A が標数 p の F -有限環で A_c が正則のとき、 c の冪が test element にとれる.

定理 2.4. 密着閉包の環準同型での持続性.

定理 2.5. 密着閉包のイデアル商獲得性質.

2.6. パラメーター系と密着閉包.

2.7. test element と極小素イデアルとの関係.

補題 2.8. 中国剰余定理.

補題 2.9. 密着閉包の基本補題.

3. p -進表現と Witt 多項式.

補題 3.1. 二項演算と Witt 多項式.

補題 3.2. p -冪と p -進表現.

補題 3.3. p -冪と密着閉包.

4. Bertini の定理.

4.1. 記号と仮定.

4.2. p -進表現と多項式 f_0 .

定理 4.3. Flenner の Bertini の定理.

4.4. 関係式の可換図式.

4.5. 密着閉包と Bertini の定理.

5. Frobenius 写像.

5.1. Frobenius 写像の定義.

5.2. D_e の定義.

5.3. Frobenius 写像と p -進表現.

5.4. pD_e の準素イデアル分解.

補題 5.5. パラメーター系の関係式と D_e での密着閉包.

6. Hochster の観察.

6.1. 記号と定義.

7. 命題 0.1 の証明.

7.1. 記号と仮定.

7.2. S 上 Hochster の観察.

7.3. T 上 Hochster の観察と Base Change 1.

7.4. Frobenius 写像と Base Change 2.

7.5. $k = 1$ の場合.

7.6. r_k が 2 以上の場合.

7.7. $r_k = 1$ の場合.

7.8. $r_k = 1$ の場合 (続き).

としてまとめ、その pdf file を M. Hochster, C. Huneke, P. Roberts, R. Heitmann 等この方面の主要研究者に配信した。

目下、論文の内容について、電子メールによる質問・回答・意見交換を行っている。

また、Kyoto Journal of Mathematics に掲載予定 (査読済) の

A Few Examples of Local Rings, I

では、C. Rotthaus, T. Ogoma, R. Heitmann 等の手法を用い、以下の局所環の諸例を構成した。

1.1. 1 次元解析的分岐または可約局所整域.

- 1.2. 完備化が極小でない素因子をもつ 2 次元局所整域.
- 1.3. 整閉包との中間環がネター環でない 2 次元 Cohen-Macaulay 局所整域.
- 1.4. 解析的正規でない解析的被約または既約 2 次元永田正規局所環.
- 1.5. 強鎖状でない 2 次元鎖状擬優秀局所整域.
- 1.6. 正則点, 完全交差点, Gorenstein 点が開集合でない 2 次元局所整域.
- 1.7. Cohen-Macaulay 点が開集合でない 3 次元局所整域.
- 1.8. 正則点, 完全交差点, Gorenstein 点が開集合でない 3 次元永田局所整域.
- 1.9. Cohen-Macaulay 点が開集合でない 4 次元永田局所整域.
- 1.10. 鎖状でない 3 次元 Hensel 永田正規局所整域.

- 2.1. 永田環でない離散付値環.
- 2.2. 一般形式ファイバーが連結でない 2 次元正規局所整域.
- 2.3. 永田環でない 2 次元正則局所環.
- 2.4. 優秀環でない正標数 $p > 0$ の 2 次元永田正則局所環.
- 2.5. 優秀環でない 3 次元永田正則局所環.
- 2.6. A_P が解析的可約な素イデアル P をもつ 3 次元解析的既約正規永田局所整域.
- 2.7. A/P が清純でないような素イデアル P をもつ 3 次元清純局所整域.

- 3.1. canonical 加群をもたない 2 次元優秀 Cohen-Macaulay 素元分解局所整域.
- 3.2. Gorenstein 加群をもたない 3 次元優秀 Cohen-Macaulay 素元分解局所整域.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- 1) Jun-ichi Nishimura, A Few Examples of Local rings, II, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, to appear
- 2) Jun-ichi Nishimura, A Few Examples of Local rings, I, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, to appear
- 3) Mitsuhiro Miyazaki, On the discrete counterparts of Cohen-Macaulay algebras with straightening laws, Journal of commutative algebra, 査読有, 2巻, 2010, 79–89
- 4) Mitsuhiro Miyazaki, A generalization of Huckaba-Marley's theorem and its application to the theory of initial ideals, 第31回可換環論シンポジウム報告集, 査読無, 31巻, 2010, 1–8

- 5) Mitsuhiro Miyazaki, Mitsuyasu Hashimoto, G-prime and G-primary G-ideals on G-schemes, 第30回可換環論シンポジウム報告集, 査読無, 30巻, 2009, 29–36
- 6) Jun-ichi Nishimura, A part of works of Professor Masayoshi Nagata, 第30回可換環論シンポジウム報告集, 査読無, 30巻, 2009, 37–47
- 7) Mitsuhiro Miyazaki, A criterion of Gorenstein property of a Doset Hibi ring, 第30回可換環論シンポジウム報告集, 査読無, 30巻, 2009, 173–179
- 8) Mitsuhiro Miyazaki, Invariants of the unipotent radical of a Borel subgroup, 第29回可換環論シンポジウム報告集, 査読無, 29巻, 2008, 43–50

[学会発表] (計 6 件)

- 1) 宮崎充弘, A generalization of Huckaba-Marley's theorem and its application to the theory of initial ideals, 第31回可換環論シンポジウム, 2009年11月24日, ホテルアウイーナ大阪
- 2) 宮崎充弘, A criterion for a Hibi ring to be level, 2009日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月27日, 大阪大学豊中キャンパス
- 3) 宮崎充弘, on the Gorenstein property of doset and generalized doset Hibi rings, 2009日本数学会年会, 2009年3月29日, 東京大学駒場キャンパス
- 4) 宮崎充弘, A criterion of Gorenstein property of a Doset Hibi ring, 第30回可換環論シンポジウム, 2008年11月21日, 国民宿舎虹ノ松原ホテル
- 5) 西村純一, 故永田雅宜先生の業績, 第30回可換環論シンポジウム, 2008年11月19日, 国民宿舎虹ノ松原ホテル
- 6) 宮崎充弘, Invariants of the unipotent radical of a Borel subgroup, 第29回可換環論シンポジウム, 2007年11月20日, 愛知厚生年金会館ウエルシティなごや

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西村 純一 (NISHIMURA JUN-ICHI)
大阪電気通信大学・工学部・教授
研究者番号: 00025488

(2) 研究分担者

坂田 定久 (SAKATA SADAHISA)
大阪電気通信大・学医療福祉工学部・教授
研究者番号: 60175362
山原 英男 (YAMAHARA HIDEO)
大阪電気通信大学・工学部・准教授
研究者番号: 30103344

宮崎 充弘 (MIYAZAKI MITSUHIRO)
京都教育大学・教育学部・准教授
研究者番号：90219767