

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540062

研究課題名(和文) 幾何解析を用いたスカラー曲率一定な超曲面の構成の研究

研究課題名(英文) Study on the construction of hypersurfaces with constant scalar curvature by using geometric analysis

研究代表者

岡安 隆 (OKAYASU TAKASHI)

茨城大学・教育学部・教授

研究者番号：00191958

研究成果の概要(和文)：

3次元ユークリッド空間の中の、ガウス曲率が一定で縁のない曲面は古くから分類されていた。これを高次元化した問題は、4次元以上のユークリッド空間の中の、スカラー曲率が一定値をとる縁のない超曲面の分類である。しかし世界的にみても研究は進んでいない。原因は例が少ないことにもある。本研究では、ユークリッド空間の中にスカラー曲率が正の一定値をとる完備な超曲面の例が沢山構成できることを示した。

研究成果の概要(英文)：

The classification problem of complete surfaces with constant Gaussian curvature in the 3-dimensional Euclidean space was solved completely in old days. If we generalize this problem to higher dimensions, the problem is to classify complete hypersurfaces with constant scalar curvature. This problem is very difficult because of lack of examples. Our study shows that there are many new examples of complete hypersurfaces with constant positive scalar curvature.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：スカラー曲率, 超曲面

1. 研究開始当初の背景

M を、3次元のユークリッド空間の完備な曲面でガウス曲率が一定なものとする。すると良く知られているように、M は球面か平面か円柱に合同である。Thomas (1936) はこの結果を高次元化し、ユークリッド空間の Einstein 超曲面は局所的に、平坦な超曲面か球面の一部に合同であることを証明した。

さて、曲率条件をスカラー曲率一定に弱め

た場合を考えよう。スカラー曲率一定は局所的には弱い条件であるから、大局的な定理が重要であると思われる。

noncompact な完備な超曲面を考えよう。平均曲率一定な超曲面に関する論文や結果が多くあるのに比して、多くの結果があるとはいえない。その理由の一つはもちろん、スカラー曲率一定の方程式の複雑さにある。しかしもう一つの理由として、例の少なさがあ

る。スカラー曲率一定で完備な超曲面がよく知られている例は、平面上の完備な曲線から作られる柱面と、円柱である。これら標準的なもの以外の最初の例は、我々による4次元ユークリッド空間の中のスカラー曲率が負の一定値をとる完備超曲面(1989)であった。その後、回転超曲面の例(M. L. Leite, 1990)や、O. Palmas (2000)による4次元ユークリッド空間の中のスカラー曲率平坦な完備超曲面と、J. Sato (2000)による偶数次元ユークリッド空間の中のスカラー曲率平坦な完備超曲面が作られただけであった。

2. 研究の目的

(1) この研究の第一の目的は、cohomogeneity が 2 である一般化された回転超曲面であって完備でありスカラー曲率一定なものを構成することである。定曲率空間における平均曲率一定で完備な超曲面は W. Y. Hsiang 達により 1980 年代にコンパクトなものも非コンパクトなものも沢山構成された。しかし、スカラー曲率については例は少ない。そこで彼らの手法を真似してスカラー曲率一定な超曲面の構成に挑戦する。

(2) 第二の目的は、スカラー曲率一定な完備超曲面であって、end を 3 つ以上もったものを構成することである。これについても、3次元ユークリッド空間に Kapouleas (1990) によって end を沢山もった平均曲率一定で完備な曲面が構成されたことや、Mazzeo, Pacard, Pollack, Kusner 等によってここ十年くらい平均曲率一定超曲面の構成において、gluing の手法が盛んに用いられてきている。この手法を参考にしてスカラー曲率一定な完備超曲面の構成を試みる。

(3) 第三の目的は、ある種の常微分方程式系についての比較定理を証明し、それを別種の問題に応用することである。

3. 研究の方法

(1) 以前の研究により、スカラー曲率を各軌道の体積関数とその微分で表現する公式を得ている(Kodai Math. J. 28(2005))。その常微分方程式系に対して、第一積分をもつような、良い常微分方程式系を比較のため考えることにより、解曲線の大域的性質を調べ、完備超曲面の存在を示す。

(2) スカラー曲率 0 な境界付き回転超曲面は、境界を少し動かしても、スカラー曲率一定な超曲面に変形できるフレキシビリティをもっている。これをまず、スカラー曲率が正で一定な境界付き回転超曲面に拡張したい。3次元ユークリッド空間の中で平均曲率一定完備曲面で構成された最初の例は、球面に Delaunay 曲面の end を 3 つ連結してできる曲面を摂動して構成したのであった。これをまねて、球面にスカラー曲率一定な回

転超曲面の end を 3 つ連結したものを考え、これを摂動してスカラー曲率一定な超曲面を構成できないかを調べる。

4. 研究成果

(1) 直交回転群の積で不変な、一般化された回転面でスカラー曲率一定な完備超曲面の構成が完成した。さらに、その副産物として、ある種の非線形微分方程式系の比較定理を得ることができ、その応用として cohomogeneity が 2 である一般化された完備回転超曲面で、第二基本形式の長さが一定なもので合同でないものを、無限個構成することができた。この手法は各種の Weingarten 曲面にも応用できることがわかった。

(2) 一般の Riemann 多様体上に第二基本形式の長さが一定なコンパクト超曲面が存在するかを研究し、つぎの結果を得た。

定理 (M, g) を Riemann 多様体とし、 p をスカラー曲率関数の非退化な critical point とする。このとき p を中心とする十分小さな距離球面は、微小変形することにより第二基本形式の長さを一定にできる。

この結果は、平均曲率については R. Ye が、高次の平均曲率については F. Mahmoudi が証明していた。

(3) 一般の Riemann 多様体上にスカラー曲率が一定なコンパクト超曲面が存在するかを研究し、つぎの結果を得た。

定理 (M, g) を Riemann 多様体とし、 p をスカラー曲率関数の非退化な critical point とする。このとき p を中心とする十分小さな距離球面は、微小変形することによりスカラー曲率を一定にできる。

(4) 3次元ユークリッド空間内のグラフで表された極小曲面について成り立つ古典的な Bernstein の定理を高次元に拡張する研究については、ガウス写像の像がグラスマン多様体の中で十分小さければ成り立つ、という Jost 達の結果があった。それに対して、1998年に岡安によって与えられた定理は異なる条件であった。「 n 次元ユークリッド空間全体で定義された p 次元ユークリッド空間に値をもつ関数 f のグラフが完備な極小部分多様体を表し、その法曲率が 0 で、さらに体積関数が 1 次以下の増大度をもつならば、 f は一次関数になる」。この定理の体積増大度についての条件が必要であることを示す反例を構成することが必要であった。その例は、1999年度~2000年度基盤研究(C)研究課題番号:11640068, 研究代表者:岡安隆「極小部分多様体に関する Bernstein 型定理の研究」において、構成された。しかし、cohomogeneity=2 の各表現について極小部分多様体を表す個々の微分方程式は様々な形をしていて、解の存在を示すことは各方程式ごとにせざるをえないものであった。本研究

はこの点を改良したものである。微分方程式の変数を適切なものに取りることにより、第一積分をもつ微分方程式を得、さらにその第一積分を用いて、同値であるがより簡単な微分方程式に帰着させることができた。得られた微分方程式の大域的な解の存在は、Y. C. Chen と L. Y. Tsai の 2005 年の論文から直ちに示すことが出来る。

定理 $\text{cohomogeneity}=2$ の直交群の各表現 (G, \mathbb{R}^{n+2}) に対して、 G を等長変換群とする一般化された n 次元回転極小部分多様体 M であって完備なものが存在する。それらは合同でないものが 2-parameter 分存在する。

(5) 国内外における位置づけとインパクト
① (1) の研究で得られたスカラー曲率が正で一定なユークリッド空間の完備超曲面は、球面と回転面を除いたとき世界で最初の例である。その点で大きなインパクトをもつといえる。また、同じ手法を応用して得られた、ユークリッド空間における第二基本形式の長さが一定な完備超曲面の構成も前例のない研究であり、オリジナルなものである。

② (2) の研究では、ユークリッド空間でない一般の Riemann 多様体において、第二基本形式の長さが一定なコンパクトな超曲面が存在することを示した。証明には、近年外国の先進的研究で多く用いられるようになって非線形解析を用いた。複雑な非線形偏微分方程式を解くために、degree theory と不動点定理を組み合わせた。(3) の研究でも同様の手法が用いられた。

③ (4) の研究はまたオリジナルのものである。古典的な Bernstein の定理を高次元のユークリッド空間内の法曲率が平坦な完備極小部分多様体に拡張する研究はわれわれ以外にも、Jost-Xin や Mu Tao Wang や Smoczyk-Wang-Xin で行われている。これらの定理を真に重要なものにするためには、法曲率が平坦ではあるが体積増大度の条件を満たさない例を構成しなければならない。これに向かって行った初めての研究がわれわれのものである。この点において重要性が非常に高い。

(6) 今後の展望

① (4) の研究に触発され、ユークリッド空間内に高い対称性をもった完備極小超曲面の新しい例を構成することができることを発見した。この研究は、有名な Bombieri-De Giorgi-Giusti の論文で初めて構成された極小超曲面の存在を非常に簡単に証明できる方法を与える。これは現在進行中の「幾何解析を用いた Weingarten 超曲面の構成の研究」で研究中である。双曲空間空間内に高い対称性をもった完備極小超曲面の新しい例を構成することも現在研究中である。

② 研究の当初の目的であった end を 3 つ

以上持つスカラー曲率一定な完備超曲面を構成する問題の解決のために、平均曲率についてここ 10 数年に行われてきた手法を研究した。Fakhi-Pacard (2000) によって、ユークリッド空間内の完備極小超曲面であって end が 3 つ以上あるものの構成が行われた。彼らの手法が一番実現可能と思われる。そのためスカラー曲率を線形化した作用素を求め、それに対応する Green 関数の存在とその無限大での振舞いの評価を得た。これで構成の準備のうち半分ができたと考えられる。これは平成 23 年度からの科学研究費基盤研究 (C) 課題番号：23540069「幾何解析を用いた Weingarten 超曲面の構成の研究」で研究中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. 岡安隆 「Closed hypersurfaces in Riemannian manifolds whose second fundamental forms are of constant length」, AIP conference proceedings: International workshop on complex structures, integrability and vector fields, 査読有, Vol.1340, 2011, 90-96
2. 岡安隆 「New examples of complete hypersurfaces with constant positive scalar curvature in the Euclidean space」, J. Math. Soc. Japan, 査読有, Vol.62, No.4, 2010, 1137-1166

[学会発表] (計 7 件)

1. 岡安隆 「ユークリッド空間の完備極小部分多様体の構成についての 2 つの結果」, RIMS 研究集会 部分多様体の微分幾何学的研究, 2011 年 6 月 29 日, 京都大学数理解析研究所
2. 岡安隆 「Comparison theorems for OD Es and their application to geometry of Weingarten hypersurfaces」, The International Conference of Differential Geometry and Tanaka Theory, 2011 年 1 月 25 日, 京都大学数理解析研究所
3. 岡安隆 「A comparison theorem for an ODE and its application to geometry of Weingarten hypersurfaces」, 10th International Workshop Complex structures, integrability and vector fields, 2010 年 9 月 15 日, ブルガリア科学アカデミー (ブルガリア)
4. 岡安隆 「Riemann 多様体での第二基本形式の長さが一定な超曲面の存在について」, 日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 24 日, 大阪大学

5. 岡安隆 「A construction of complete hypersurfaces with constant scalar curvature in the Euclidean space」, The ninth Pacific Rim Geometry Conference (第9回環太平洋幾何学研究集会), 2008年12月10日, (国立台湾大学、台湾)

6. 岡安隆 「Riemann 多様体における第二基本形式の長さ一定な超曲面の存在について」、新潟微分幾何学研究集会, 2008年11月6日, 新潟大学

7. 岡安隆 「A construction of complete hypersurfaces with constant scalar curvature」, 10th International Conference on Differential Geometry and Its Applications, 2007年8月31日, (Palacky University, チェコ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡安 隆 (OKAYASU TAKASHI)

茨城大学・教育学部・教授

研究者番号：00191958

(2) 研究分担者

柳田 伸顕 (YAGITA NOBUAKI)

茨城大学・教育学部・教授

研究者番号：20130768