様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月　２１日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007　～　2009
課題番号：１９５４００６５
研究課題名（和文）　ポアソン幾何と関連する幾何学の研究

研究課題名（英文）RESEARCH ON THE POISSON GEOMETRY AND THE RELATED GEOMETRIES

研究代表者
水谷 忠良（MIZUTANI TADAYOSHI）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：２００８０４９２

研究成果の概要（和文）：ポアソン幾何学の対象であるポアソン多様体の大きな特徴の一つは、余接束がリー亜代数の構造を持つことである。リー亜代数はリー亜群の単位元集合の法束として得られるとき積分可能というが，この積分可能性を調べることを直接的な動機として、外微分形式系の積分多様体を求めるという強力な理論について、その内容と幾何学的な応用例について広範に調べ、関連する幾何学の積分可能性の問題についての知見を広げるとともに基本的技法を修得した。

研究成果の概要（英文）：One of　the main geometric feature of a Poisson manifold is that its cotangent bundle carries a structure of a Lie algebroid. If a Lie algebroid comes from the normal bundle of the unit space of a Lie groupoid, it is called integrable. All the Lie algebroids are not integrable. Motivated by such integrability problem, we studied the powerful integrability theory (which is the theory of exterior differential systems), along with many geometric applications. As a result, we have acquired fundamental techniques to solve various integrability problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分トポロジー、ポアソン構造、積分可能性、包合性

１．研究開始当初の背景

（１）シンプレクティック多様体には、よく知られているように、二つの関数に対してポアソン・ブラケットが定義され、古典力学の記述などにおいて、重要な役割を果たしている。シンプレクティック多様体に限らず、その上の関数に同様な性質を満たすポアソン・ブラケット積が定義されるものをポアソ

ン多様体と呼ぶ。そのブラケット積は、２ベクトル場πを用いて
$\{f,g\}=\pi(df,dg)$　ただし $[\pi,\pi]=0$
と記述される。ポアソン多様体(M,π)の重要な幾何学的特徴に、次の二つがある。
① ハミルトン・ベクトル場の定義する接平面場は積分可能であり、シンプレクティック多様体を leaf とする(特異)葉層構造を持つ。
② M 上の１次微分形式の空間がリー代数の構造を持つ。
これら二つの特徴は, M の余接束がリー亜代数（Lie algebroid）の構造を持つことと定式化される。研究代表者は、従来、ポアソン多様体の持つ Lie 亜代数構造に関して一般の Lie 亜代数や１コサイクルで変形した括弧積などの定式化、Dirac 構造や Courant 亜代数などについて研究を進めてきた。その中で、Lie 亜代数が Lie 亜群から構成されるための条件すなわち積分可能性の研究に興味を持った。
（２）一方、上とは多少ニュアンスは異なるが、同じく積分可能性が問題となる外微分形式系（exterior differential system）における積分多様体の存在の理論、それに基づく G 構造の理論の展開と接触構造などの幾何学的構造の局所同値問題への応用、微分方程式の幾何学的研究における対称性の研究における G 構造の計算手法などを修得することが必要であると考えた。

２．研究の目的
上記 １．を背景として，次の 3 点を研究の目的に設定した。
（１）以下に述べるこれまでの研究で得られた知識を生かして研究対象としてリー亜代数のホモロジー、コホモロジーの特性類の定式化について研究する。従来、研究代表者はリー亜代数、１コサイクルで変形したブラケット積などに関連して、幅広く研究をしてきたが、その内容は次の論文に集約されている。
Mikami, K., Mizutani, T.: A Lie algebroid and a Dirac structure associated to an almost Dirac structure, FOLIATIONS 2005,ed. by P. Walczak et al.,World Scientific, Singapore, (2006),341～352.
（２）リー亜代数のリー亜群への積分可能性問題について研究する。ひとつには、関連する研究として次の論文が出版されているので、これを精査することを行う：
Cranic,M.,Fernandes,R.:
Integrability of Lie bracket, Ann. of Math., 157 (2003),575～620.
（３）同時に、ポアソン幾何学に関連する積分可能性への応用を念頭に置いて、微分形式系の積分可能性について研究する。これは元来、微分方程式の幾何学的研究に深く関連があるものであり、Lie 亜代数の積分可能性とその応用をを研究する上で、新しい視点を提供することが期待される研究方向である。とくにＧ構造の計算理論を修得し研究の様々な局面での活用を図る。

３．研究の方法
ポアソン多様体の幾何学に関連して、リー亜代数を基軸として一般化された葉層構造、ホモロジー、コホモロジーさらにそれらを用いて定義されるモジュラー類などの特性類の研究を行う。
さらに、リー亜代数に対応するリー亜群への積分可能性については、具体的なリー亜代数をとりあげてリー亜群との関係について研究する。また、同じ積分可能性の問題を接平面場の幾何学の立場から、一次微分形式系について微分方程式の幾何学的理論との関連において研究を遂行する。要約すると、次の具体的な内容について研究を進める。

（１）リー亜代数の積分可能性に関する結果はこれを深く理解することが研究の推進の上で必須であると考え、これまでの既知の結果や手法を修得する。その際、リー亜群、リー亜代数の微分方程式の対称性への応用を念頭において研究を遂行する。
（２） 微分方程式の幾何学的理論への応用を念頭に外微分形式系に関連する研究を行う。

研究活動の具体的な方法および形式としは、研究代表者は上記二つのテーマについて主体的に研究を進めることとし、研究遂行の過程で、微分幾何学独自の複雑な計算や問題、代数幾何学で用いられる概念や手法の理解が必要となることが予想されるが、このような状況では、研究分担者および連携研究者に協力を求め、集中的なセミナーを行い、概念の理解を深め研究の推進を図る。

３．研究成果

(1)2007 年度
申請書で記した研究目的の一項目：「微分方程式の幾何学的理論への応用を念頭に、外微分形式系に関連する研究を行う」について、偏微分方程式、あるいは外微分形式系の積分可能性について研究を行い、特に、Cartan 流の研究の流れに沿う包合系の理論の修得に努めた。その一部を、次のように専門分野の研究集会で発表した。
講演の表題：「接触多様体上の Euler-Lagrange 外微分形式系と Noether の定

理について」
研究集会：「量子化の幾何学 2007」 早稲田大学, 2007 年 9 月 7 日
内容は、古典的なオイラー・ラグランジュ方程式と同様に、接触多様体におけるルジャンドル部分多様体に対する汎関数の変分から、モンジュ・アンペール微分式系が得られることと、Noether の定理に関連する保存則がある種のコホモコジー類として捕らえられることについて報告したものである。
これらは、研究目的のうち微分方程式の幾何学に関するもので、Lie 亜代数の積分可能性を研究する上で、重要な視点を提供するものである。

(2)2008 年度
引き続き、研究代表者は研究目的にあげた項目のうち、「微分式系の包合性の理解、手法の修得」に主眼を置いて研究を遂行した。
具体的な内容は外微分形式系と G 構造に関する包合性の理解と手法の修得であった。特に包合的な描板のスペンサー・コホモロジーが自明になること、および描板の延長が線形微分方程式の積分要素の空間として捕らえられ、描板の形式的な包合性の定義が、一般の微分形式系における包合性の定義に一致していることを確認した。また、2n+1 次元の接触多様体上にラグランジュ括弧に関して可換なｎ+1 個の独立な関数があったとき、それらにｎ個の関数を付け加えて接触変換を作ることができることが分かっているが、ポアソン幾何で用いられる２ベクトル場を用いた見通しのよい証明があることを示した。また、微分１形式の標準形に関するダルブーの定理についてコーシー特性系が有効に利用されることを学んだ。そのほか、G 構造の構造関数、延長、幾何学への応用、および、線形外微分形式系の包合性、特性多様体に関して知見を深めた。一方，連携研究者 福井敏純はミンコフスキー空間の曲線に対するフレネ・セレの公式を考察した。さらに、ミンコフスキー時空の中に実現される双曲空間やドジッター空間を尊重して、フレネ・セレの公式を考察することも試みた。その結果、曲線の位置ベクトルのｋ階までの微分の作る平行多面体の体積を使って、曲率等の情報を明示的に表示する公式を得た。また、曲面の漸近方向、主方向の概念の一般化したものとそれらが満たすべき微分方程式を明示的に表すことについて結果を得た。

(3)2009 年度
研究代表者は前年に引き続き、研究目的にあげた項目の「微分方程式の幾何学的理論に関しての外微分形式系の研究」「微分式系の包合性の理解、同値問題の計算方法の修得」に重点を置いて研究を遂行した。特に、G 構造における正規化(normalization)と延長(prolongation) の正しいとらえ方、および G 構造を「同値問題」に適用して計算を遂行する時のアルゴリズム的とらえ方と具体的手法を修得した。その上で、リーマン多様体の局所同値性、リーマン多様体のユークリッド空間への等長埋め込み問題における具体的な計算、ならびに二階常微分方程式の同値問題におけるトーションの計算の流れを確認した。これらは、決して新しい技法ではないが、この方面の研究において十分に理解し身につけておくべき重要な技法であり、以後の研究の遂行に不可欠なものと考える。また、リー亜代数のリー亜群への積分可能性の研究への応用を念頭に置いて、Lie の基本定理とそれを拡張した Cartan の Lie 擬群に関する基本定理の見直し、および、一般の外微分形式における積分多様体の構成に関して、「包合性の理論」のさらなる理解と修得を図った。 また、連携研究者、研究分担者とのセミナー、討論を通じて ウェッブ構造における Gronwall 予想、複素二次元ユークリッド空間 C^2 における CR 超曲面の同値問題への上記の技法の応用に関しての知見を深めた。一方、連携研究者の長瀬正義は、接触リーマン多様体（CR 多様体における概複素構造の積分可能性の条件を外した多様体） 上の Kohn-Rossi Laplacian に付随した熱核の研究に関連して、CR 多様体における Tanaka-Webster 接続の拡張を導入し、その曲率やトーションの記述に関して十分詳細な情報を得た。また、連携研究者の阪本邦夫は、CR 多様体上に CR-Weyl 接続を導入し、Weyl 幾何学の立場から CR 幾何学を見直しさらに発展させることを目指して、以下に具体的に述べる研究を遂行した。複素多様体の実超曲面には CR 構造が自然に導入される。特に Kaehler 多様体の実超曲面であれば Riemann 構造も自然に導入される。部分多様体論の立場からこの CR 構造について研究し、さらに付随する distribution に垂直な直線バンドルと CR-Weyl 接続との関連を研究した。得られた成果は次のように述べることができる。「CR-構造に付随する Weyl 接続は余次元１の分布に横断的な直線バンドルを定め、逆に横断的な直線バンドルを与えれば、ある関数を定めることにより CR-Weyl 接続が定まる」。さらに、この結果を上の実超曲面の直線バンドルに適用し、実超曲面上に“最も自然な”CR-Weyl 接続を得ることを目標にして研究を続行しているが、これらの研究はこれまでにない独自のもので意義深いものと考える。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計４件）

１．T. Fukui, K. Kurdyka and L. Paunescu ; Tame nonsmooth inverse mapping theorems, SIAM J. Optim., Vol. 20, 1573-1590 (2010) 、査読有

２．Masayoshi Nagase ; The Laplacian and the heat kernel acting on differential forms on spheres, Tohoku Math. Journal, Vol. 61, 571-588, (2009)、 査読有

３．Masayoshi Nagase ; Twistor spaces and the general adiabatic expansions, J. Funct. Anal. Vol. 251, 680-737, (2007) 、 査読有

４．Kentaro Mikami, Tadayoshi Mizutani ; Algebroids Associated with Pre-Poisson Structures ; noncommutative geometry and physics 2005, Proceedings of the International Sendai-Beijing Joint Workshop, (World Scientific) 71-96 (2007)、 査読有

〔学会発表〕（計３件）
１．水谷忠良、「描板とスペンサーコホロジーについて」、東工大土曜セミナー、東京工業大学、 2009 年 2 月 21 日

２．水谷忠良、「G 構造の構造関数について」、東工大土曜セミナー、東京工業大学、2008年6月21日

３．水谷忠良、「接触多様体上の Euler-Lagrange 外微分形式系と Noether の定理について」、量子化の幾何学 2007、早稲田大学、2007 年 9 月 7 日

〔図書〕（計　０件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
水谷 忠良（MIZUTANI TADAYOSHI）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：２００８０４９２
(2)研究分担者
坂本 邦夫（SAKAMOTO KUNIO）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：７００８９８２９
（Ｈ２０→Ｈ２１ ：連携研究者）
長瀬 正義（NAGASE MASAYOSHI）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：３０１７５５０９
（Ｈ２０→Ｈ２１ ：連携研究者）
福井 敏純（FUKUI TOSHIZUMI）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：９０２１８８９２
（Ｈ２０ ：連携研究者）

(3)連携研究者
（　）

研究者番号：