

平成21年5月8日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540077

研究課題名（和文） 3次元トポロジーにおける代数的構造

研究課題名（英文） Algebraic structures in 3-dimensional topology

研究代表者

葉廣 和夫（HABIRO KAZUO）

京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号：80346064

研究成果の概要：3次元トポロジーのいくつかのトピックスについて研究を行った。特に主要な結果として、G. Massuyeau 氏と共同で、曲面のホモロジーシリンダーのなすモノイドを Y_n 手術同値関係で割って得られる群を集めて構成される Lie 代数が、ある種の Jacobi ダイアグラムのなす Lie 代数と同型であることを証明した。この同型により得られる曲面の写像類群の Torelli 部分群の表現の代数的構造についても考察を行った。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学、3次元多様体、絡み目、量子不変量

1. 研究開始当初の背景

Jones による絡み目の多項式不変量の発見以来、絡み目と3次元多様体の様々な不変量（量子不変量）が導入され、活発に研究されている。量子不変量を理解するのに最適な枠組みは圏論的なものである。タングルの圏はモノイダル圏の構造を持ち、絡み目をより基本的な部分に分割して研究する手段を与える。タングルの Reshetikhin-Turaev 不変量は、タングルの圏 \mathcal{T} から、量子群 H 上の左加群

の圏 $H\text{-Mod}$ への関手である。Crane, Yetter, Kerler は、円周 S^1 を境界とする曲面の間のコボルディズムたちのなす圏 \mathcal{C} を導入した。研究代表者は、圏 \mathcal{C} のある部分圏 \mathcal{B} で、絡み目理論への応用に関してより有用であるものを導入し、量子群 H に対し、 \mathcal{B} から左 H 加群の圏 $H\text{-Mod}$ へのモノイダル関手 J を定義した。また、筆者は \mathcal{C} の部分圏 \mathcal{L} で、 \mathcal{B} よりも少しだけ大きい「ホモロジーハンドルボディ内の底タングルのなす圏」というものも導入したが、これは、整係数ホモロジー球

面や曲面の写像類群の Torelli 部分群の研究に適した構造である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、3次元トポロジーにおける圏論的・Hopf 代数的構造を次に述べる側面から明らかにすることである。

(1) 圏 B, C の代数的表示を求める。

(2) 圏 B, C などの上で定義される、3次元多様体の関手的不変量を研究する。より具体的には、次の研究を行う。

- ① 量子群に付随する圏 B, L, C 上の関手を考察する。
- ② 圏 B, L, C における、Kontsevich-Le-Murakami-Ohtsuki 型の関手について考察する。
- ③ クラスパーと有限型不変量・手術同値関係を圏論的な側面から研究する。

3. 研究の方法

研究の主な部分は研究代表者が単独で行うが、一部は研究協力者と連絡を取りながら共同で行う。

研究連絡、研究集会等参加のために旅費を支出する。また、研究に必要な書籍、消耗品などを研究費を使用して購入する。

4. 研究成果

平成19年度

平成18年度に D.Cheptea 氏, G.Massuyeau 氏と共同で、曲面のラグランジアン同境のなす圏 L から、ある Jacobi ダイアグラムの圏への、Kontsevich-Le-Murakami-Ohtsuki 不変量型の関手を構成したが、平成20年度は、G.Massuyeau 氏と共同のプレプリント “Symplectic Jacobi diagrams and the Lie algebra of homology cylinders” (投稿中) において、上記の関手を応用した。

曲面のホモロジーシリンダーのなすモノイドを Y_n 手術同値関係で割って得られる群を集めて構成される Lie 代数が、ある種の Jacobi ダイアグラムのなす Lie 代数と同型であることを証明した。後者は、ある Hopf 代数の原始元のなす Lie 代数と同一視することができるが、この Hopf 代数における乗法は、Moyal-Weyl 積のダイアグラムの類似物とみなすことができることも観察した。また、曲面の写像類群の Torelli 部分群は、写像柱構成により、ホモロジーシリンダーのなすモノイドに自然に埋め込むことができ、この埋め込みによって、Torelli 部分群の降中心列は、ホモロジーシリンダーの Y -フィルトレーションに移され、これは、Torelli 部分群に付随する Lie 代数から、上記の Jacobi ダイアグラムのなす Lie 代数への準同型となるが、この準同型の組み合わせ的な記述を、Hain による Torelli 部分群に付随する Lie 代数の代数的表示と関連付けて行った。この準同型が次数2において単射となることを証明し、一般の次数についての議論も行った。

平成20年度

この年度中に実質的に完成させることができた論文はなかったが、下記の事項について研究し、現在も研究を継続している。

(1) Jacobi 図は Kontsevich-LMO 不変量などの有限型不変量の研究に現れるグラフであるが、Jacobi 図のなす空間を利用して、Lie 代数の Chevalley-Eilenberg 複体や、Lie 代数の普遍包絡環の bar 複体の、Lie 代数によらない普遍的な類似物を構成することができる。これらの複体の構造について、G.Massuyeau 氏と共同で研究を進めている。

(2) 枠付き絡み目に対する Kirby の定理は、3次元多様体を枠付き絡み目を通して研究する重要な手段を与えている。3次元球面を有限個の Y -link (Y -clasper の有限個の非交和) に沿って手術することにより、任意の整係数ホモロジー球面を得ることができるが、 Y -link たちに対する Kirby 型の

定理、すなわち、Y-link に対する有限個の種類の手続きで、それが生成する同値関係による Y-link の集合の商が整係数ホモロジー球面の向きを保つ同相類の集合と一対一に対応するようなものは、まだ知られていない。これについて、J.-B. Meilhan 氏と共同で研究を進めている。証明のための大まかな方針はできたので、早期に完成できると期待している。

(3) 以前の研究で、整係数多項式環 $Z[q]$ のある完備化を定義し、その完備化に値を持つ整係数ホモロジー球面の不変量で種々の 1 の巾根における Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量を統一するものを定義したが、このような完備化を、 $Z[q]$ の代わりにより一般の可換環に対して定義し、その性質について研究している。 $Z[q]$ の完備化のときと同様に、解析関数の環のような性質を満たすために必要な条件について調べている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Kazuo Habiro, Jean-Baptiste Meilhan, Finite type invariants and Milnor invariants for Brunnian links. *International Journal of Mathematics* **19** (2008) 747-766. (査読あり)
- ② Dorin Cheptea, Kazuo Habiro, Gwenael Massuyeau, A functorial LMO invariant of Lagrangian cobordisms. *Geometry & Topology* **12** (2008) 1091-1070. (査読あり)
- ③ Kazuo Habiro, A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant of integral homology spheres. *Inventiones Mathematicae* **171** (2008) 1-81. (査読あり)
- ④ Kazuo Habiro, Brunnian links, claspers and Goussarov-Vassiliev finite type invariants. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **142** (2007) 459-468. (査読あり)
- ⑤ Kazuo Habiro, An integral form of the quantized enveloping algebra of sl_2 and its completions. *Journal of Pure and Applied Algebra* **211** (2007), 265-292. (査読あり)

[学会発表] (計 12 件)

- ① Kazuo Habiro, On the Witten-Reshetikhin-Turaev invariant and analytic functions on roots of unity, Workshop "Low dimensional topology and number theory", 2009/3/18, 福岡ソフトリサーチパークセンター
- ② Kazuo Habiro, Category of tangles and quantum invariants, The 6th RIMS-Kyoto University and SNU Joint Symposium on Mathematics, 2009/2/17, Seoul National University, Korea
- ③ 葉廣和夫, 絡み目と 3 次元多様体のクラスパーに沿った手術について、日本数学会秋季総合分科会、2008 年 9 月 26 日、東京工業大学
- ④ Kazuo Habiro, On the unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres and its extension to Lagrangian cobordisms, Workshop "Finite type invariants, fatgraphs and Torelli-Johnson-Morita theory", 2008/3/29, Center for the Topology and Quantization of Moduli Spaces (CTQM), Aarhus University, Denmark
- ⑤ 葉廣和夫, 底タングルの圏と量子不変量について、城崎新人セミナー、2008 年 2 月 19 日、豊岡市立健康福祉センター
- ⑥ 葉廣和夫, コボルディズムの圏と底タングルの圏における Hopf 代数構造、信州トポロジーセミナー、2007 年 11 月 19 日、信州大学理学部
- ⑦ 葉廣和夫, Morse 理論から得られる TQFT について、研究集会「2+1 次元トポロジーの新しい流れ」、2007 年 11 月 14 日、早稲田大学大久保キャンパス
- ⑧ 葉廣和夫, 圏 B, L, C において定義される関手について、研究集会「2+1 次元トポロジーの新しい流れ」、2007 年 11 月 14 日、早稲田大学大久保キャンパス
- ⑨ 葉廣和夫, 底タングルの圏 B とコボルディズムの圏 L, C について、研究集会「2+1 次元トポロジーの新しい流れ」、2007 年 11 月 13 日、早稲田大学大久保キャンパス
- ⑩ 葉廣和夫, Morse 理論から得られる TQFT について、大阪市大 COE・京大 COE 若手合同発表会、2007 年 7 月 14 日、大阪市立大学文化交流センター
- ⑪ Kazuo Habiro, Topological quantum field theories derived from non-semisimple spherical categories, Talks in Mathematics Physics, 2007/6/28, Institut fur Mathematik,

Zurich University, Switzerland

- ⑫ Kazuo Habiro, Non-semisimple TQFTs derived from spherical categories, Seminaire quantique, 2007/6/25, Institut de Recherche Mathematique Avancee, Strasbourg University I, France

6. 研究組織

(1) 研究代表者

葉廣 和夫 (HABIRO KAZUO)
京都大学・数理解析研究所・講師
研究者番号：80346064

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし