

平成 22 年 5 月 24 日現在

研究種目： 基盤研究 (C)
 研究期間： 2007 ~ 2009
 課題番号： 19540082
 研究課題名 (和文) 巾零幾何と巾零解析の展開

研究課題名 (英文) Developments of nilpotent geometry and nilpotent analysis

研究代表者

森本 徹 (MORIMOTO TOHRU)
 京都大学・数理解析研究所・長期研究員
 研究者番号：80025460

研究成果の概要 (和文)：巾零幾何・巾零解析の枠組みを基礎にして、群と幾何と微分方程式の三者が有機的に繋がり合う境地を見出し、その様相を解明してきた。特に、リー環の表現と線形微分方程式系と旗多様体での外在的幾何の三位一体ともいふべき緊密な関係を明らかにし、さらにリー環が単純なときには、そのリー環の表現に付随した、一方では可積分な線形微分方程式系の、他方では旗多様体の部分多様体の、不変量を求める一般的な方法を確立した。

研究成果の概要 (英文)：Based on nilpotent geometry and analysis, a trinity of representation of Lie algebras, integrable system of linear differential equations and extrinsic geometry in flag manifolds is established. Moreover, we obtain a general method to calculate the invariants of an integrable system of linear differential equations (or those of a submanifold in a flag manifold) associated with a representation of a Lie algebra, if the Lie algebra is simple.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：巾零幾何, 巾零解析, フィルター付き多様体, リー環の表現と微分方程式, 旗多様体での外在的幾何, 線形偏微分方程式系の不変量

1. 研究開始当初の背景

Sophus Lie が今日のリー群すなわち連続群の概念を見出しその理論を展開した第一の

動機は、群を基礎にして微分方程式の解法理論を建設することであると言われている。Felix Klein はそれまでの様々な幾何を群の

等質空間として統一的に捉える見方を提案した。Elie Cartan は等質空間にとどまらずさらに espace généralisé, すなわち等質空間をモデルとした曲がった空間を考案し, 等質でない幾何も含めた一層広い範囲の様々な幾何を群を通して統一的に捉える道を拓いた。ユークリッド幾何からリーマン幾何への一般化がユークリッド運動群だけでなく他の様々な群においても可能であることを示したのである。さらに Cartan は無限次元のリー群の理論を建設し, それを通じて偏微分方程式と幾何構造の研究を展開した。これらの研究に端を発し, 20 世紀, 微分幾何学は急速に発展し, 数多くの数学者の努力によりリー群, 幾何構造, 微分方程式における基本概念が整備され, これらについての理解が進んだ。この中で田中昇により創案された巾零近似の方法は, それまでの研究の流れの中で異色なものであったが, 幾何構造の実際的な研究に有効であり, CR 構造などいろいろな幾何構造の研究で成功した。その巾零近似の見方は, それらに留まらずさらに広い一般性を内包するものであり, 研究代表者らはフィルター付き多様体上の巾零幾何・巾零解析として理論を展開した。特に, フィルター付き多様体上, 微分の重み付き次数を元にして微分方程式の系統的な研究を展開し, これまでにない新たな微分方程式における解の存在定理を確立し巾零解析の道を拓いた。

近年, Andreas Cap, Jan Slovák らが放物幾何というものを意欲的に展開しているが, これはある意味で巾零幾何に含まれるものである。この他にも巾零幾何・巾零解析は数学の色々な分野と関係し, 最近海外のあちこちから巾零幾何・巾零解析に関心が寄せられている。

最近, 研究代表者は階数付きリー環の表現に対してフィルター付き多様体上の微分方程式系の族を対応させる単純な原理を見出した。そこから, 巾零幾何と巾零解析を基にして, リー環と微分方程式と幾何の緊密な関係を捉える理論の構想が生まれてきた。

2. 研究の目的

巾零幾何と巾零解析を一層深め幅広く展開しながら, それを基にして, 群と微分方程式と幾何の緊密な関係を解明していくことが本研究の主要な目的である。

3. 研究の方法

巾零幾何と巾零解析を中心として, 本研究組織の研究者はもとより関連する内外の研究者と研究交流や研究討論を行い本研究の

遂行に努めた。研究代表者に直接関わる主なものについて以下に記す。

(1) 2007 年 7 月 Gyeong-Ju での国際研究集会に招待され, 講演をすると同時に Kim Kang-Tae Kim (Postech), Chong-Kyu Hang (Seoul), Gerd Schmalz (Australia) らと交流を持った。

(2) 2007 年 11 月 Boris Doubrov (Minsk, Belarus) を奈良に招聘し共同研究を行った。

(3) 2008 年 1 月 Seoul National Univ. での国際研究集会に招待され, 連続講演を行い韓国の研究者はもとより Dmitri Zaitsev (Dublin), Bernard Lamel (Wien), Andrei Spiro (Florence) らと研究交流を持った。

(4) 2008 年 1 月 CIRM(Marseille) に招待され講演を行い Bernard Malgrange (Grenoble), Laurent Stolovich (Toulouse) らと研究交流を持った。

(5) 2008 年 3 月 奈良研究会において関連する日本の研究者が研究交流を深めた。

(6) 2008 年 9 - 10 月 Schroedinger Institute に招かれ Andreas Cap, Bernard Lamel らと研究討論をする。その後 Belarus 科学アカデミーに招待され Boris Doubrov と共同研究を行う。さらに続いて Florence 大, CIRM (Marseille), Institute Fourier (Grenoble) に招かれ講演, 討論をする。

(7) 2009 年 1 月 Banach Centre (Warsaw) に招待され連続講演をし, Paweł Nurowski (Warsaw), B. Doubrov, A. Cap, Ian Anderson (Utah) らと討議し, また多くの若い研究者らとも交流を持つ。

(8) 2009 年 3 月 Katarina Neusser (Wien) を数理研に受け入れ巾零解析に関する彼女の博士論文の指導をする。

(9) 2009 年 4 月 KIAS(Seoul) に招かれ講演をし Jun-Muk Hwang (KIAS), Paweł Nurowski らと討議し, また Doubrov と共同研究を進め共著論文の原稿を書く。

(10) 2009 年 12 月 Ian Anderson を京都に招き COE セミナーで講義をしてもらうと同時に Maple を援用して微分方程式の不変量について共同研究をする。

(11) 待田芳徳とはだいたい月 1 回のペースでセミナーを行い共同研究を進めた。

4. 研究成果

群と幾何と微分方程式は様々なところで関係し合うが, 巾零幾何・巾零解析の枠組みを基礎にして, それら三者が有機的な繋がり合う境地を発見しその様相を解明してきた。特に, 次の結果を得た。

(1) 階数付きリー環の表現 (g, V) に付随し

てフィルター付き多様体上の微分方程式系の族 $D(g, V)$ が決まること。

(2) $D(g, V)$ の中で線形かつ可積分なもの全体の族 $ILD(g, V)$ と旗多様体の部分多様体でタイプ (g, V) の接触列をもつもの全体 $\Sigma(g, V)$ とはカテゴリー的に同型であること。

(3) リー環 \mathfrak{g} が単純のとき, $ILD(g, V)$ における同値問題を解く一般的方法を確立した。

(4) 上記(3)の理論を旗多様体の部分多様体論に応用することにより剛性問題を解くための有効で系統的な方法を与えた。

以上の結果は研究代表者の内外での招待講演の対象となった。また B. Doubrov, 待田, 森本の共著論文としてまとめつつある。

さらに研究分担者や連携研究者らにより巾零幾何, 巾零解析に陰陽に関係し色々な成果が得られている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 27 件)

- ① T. Arakawa, D. Chebotarov and F. Malikov, Algebras of twisted chiral differential operators and affine localization of \mathfrak{g} -modules, arXiv: 0810.4964v2 [math.AG], to appear in Selecta Math. 査読有
- ② W. Bauer, K. Furutani and C. Iwasaki, Spectral Analysis and Geometry of a sub-Laplacian and related Grushin type operators, to appear in Trends in partial Differential Equations and Spectral Theory in "Advances in Partial Differential Equations", Birkhaeuser. 査読有
- ③ K. Kiyohara, P. Topalov, On Liouville integrability of h -projectively equivalent Kahler metrics, to appear in Proc. AMS. 査読有
- ④ M. Igarashi, K. Kiyohara, On Hermite-Liouville manifolds, to appear in J. Math. Soc. Japan 査読有
- ⑤ G. Ishikawa, Singularities of flat extensions from generic surfaces with boundaries, to appear in Differential Geometry and its Application. 査読有
- ⑥ M. Koiso and B. Palmer, Anisotropic umbilic points and Hopf's Theorem for surfaces with constant anisotropic mean curvature, to appear in Indiana

University Mathematics Journal, 査読有, Vol. 59, No. 1, 2010.

- ⑦ W. Bauer and K. Furutani. Spectral zeta function of a sub-Laplacian on product sub-Riemannian manifolds and zeta-regularized determinant, Journal of Geometry and Physics} Vol. 60, No. 9 (2010), 1209-1234. 査読有
- ⑧ Y. Agaoka, Degree of triangle centers and a generalization of the Euler line, Beitrage Algebra Geom., 査読有, Vol. 51, No. 1, 2010, pp. 63-89
- ⑨ T. Morimoto, Cartan connection associated with a subriemannian structure, Differential Geometry and its Applications, 26(2008) 75-78. 査読有
- ⑩ Y. Agaoka, E. Kaneda, Local isometric imbeddings of Riemannian symmetric spaces and their rigidity, Sugaku Expositions, 査読有, Vol. 21, No. 1, 2008, pp. 33-54.
- ⑪ G. Ishikawa and S. Janeczko, Bifurcations in symplectic space, Banach Center Publ., vol. 82 (2008), 111-124. 査読有
- ⑫ G. Ishikawa, Global classification of curves on the symplectic plane, Contemporary Mathematics 459, Amer. Math. Soc., (2008), pp. 51--72. 査読有
- ⑬ M. Koiso and B. Palmer, Rolling construction for anisotropic Delaunay surfaces, Pacific Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 234, No. 2, 2008, pp. 345-378.
- ⑭ N. Nakanishi, Quadratic Nambu-Poisson structures, Differential Geometry and its Applications, Proc. Conf. in Honor of Leonhard Euler (2008), pp. 329--337. 査読有
- ⑮ T. Arakawa, Representation Theory of W -Algebras, Invent. Math., Vol. 169 (2007), no. 2, 219--320. 査読有

[学会発表] (計 76 件)

- ① 森本徹, Lie代数の表現に付随した微分方程式系とGrassmann部分多様体の外在的幾何, 2010, 1, 28, 研究集会「接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺」洞爺湖文化センター
- ② T. Morimoto, Differential equations associated with a representation of a Lie algebra and extrinsic geometry of

submanifolds in a flag manifold, Workshop on geometric structures and equivalence problems, Korea Institute for Advanced Study, Seoul, April 27 - 30, 2009. (韓国)

③森本徹, 巾零解析の展開; 特に, リー環の表現に付随した微分方程式系と旗多様体の部分多様体の外在的幾何, 京大数学談話会, 数理解析研究所, 2009, 4, 15.

④T. Morimoto, Tanaka theories, surroundings, and developments - Geometry of differential systems, geometry of differential equations and Cartan connections, 6, 7, 8 January, 2009, Banach Centre School and Mini-Workshop on Geometry of ODE's and Vector Distributions, Banach Centre (Warsaw), (ポーランド)

⑤T. Morimoto, Nilpotent analysis and systems of partial differential equations associated with representations of Lie algebras, 15 October, 2008, Institut Fourier (Grenoble) (フランス)

⑥T. Morimoto, Differential equations from the viewpoint of nilpotent analysis, 9 October 2008, Equations aux dérivées partielles et théorie de Galois différentielles CIRM(Luminy) (フランス)

⑦T. Morimoto, Linear differential equations of finite type and extrinsic geometry in flag manifolds. University of Florence, 3 October, 2008. (フランス)

⑧森本徹, 幾何と群と微分方程式, 3月17日, 退官記念研究集会, 奈良女子大学

⑨T. Morimoto, Differential Equations and Nilpotent Analysis on Filtered Manifolds, 1 February 2008, Workshop on Holomorphic partial differential equations, small divisors and summability, CIRM (Centre International des Rencontres Mathématiques, Marseille), (フランス)

⑩T. Morimoto, Differential Equations on Filtered Manifolds - Nilpotent Analysis I, II, III, '14, 15, 17 January 2008, Workshop on CR geometry and overdetermined PDE systems', Seoul National University, Seoul, 14-18 January, 2008. (韓国)

⑪T. Morimoto, Geometry of holonomic systems, Workshop on Differential Equations and Asymptotic Analysis, RIMS, Kyoto University, 18 December 2007.

⑫T. Morimoto, Nilpotent analysis on filtered manifolds, The 8th International Conference on Several Complex Variables, Gyeong, Korea, 2 July 2007. (韓国)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森本 徹 (MORIMOTO TOHRU)
京都大学・数理解析研究所・長期研究員
研究者番号: 80025460

(2) 研究分担者

小磯 深幸 (KOISO MIYUKI)
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号: 10178189

(分担期間: 2007 年度)

荒川 知幸 (ARAKAWA TOMOYUKI)
奈良女子大学・理学部・准教授
研究者番号: 40377974

(分担期間: 2007 年度)

石川 剛郎 (ISHIKAWA GOO)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50176161

(分担期間: 2007 年度)

古谷 賢朗 (FURUTANI KENRO)
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号: 70112901

(分担期間: 2007 年度)

待田 芳徳 (MACHIDA YOSHINORI)
沼津工業高等専門学校・教養科・准教授
研究者番号: 90141895

(分担期間: 2007 年度)

清原 一吉 (KIYOHARA KAZUYOSHI)
岡山大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 80153245

(分担期間: 2007 年度)

阿賀岡 芳夫 (AGAOKA YOSHIO)
広島大学・総合科学部・教授
研究者番号: 50192894

(分担期間: 2007 年度)

木曾 和啓 (KISO KAZUHIRO)
愛媛大学・名誉教授
研究者番号: 60116928

(分担期間: 2007 年度)

中西 靖忠 (NAKANISHI NOBUTADA)
岐阜経済大学・経営学部・教授
研究者番号: 50124053

(分担期間: 2007 年度)

片桐 民陽 (KATAGIRI MINYO)
奈良女子理学部・准教授
研究者番号: 60263422

(分担期間: 2007 年度)

(3) 連携研究者

小磯 深幸 (KOISO MIYUKI)
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号: 10178189

(連携期間: 2008 年度~2009 年度)

荒川 知幸 (ARAKAWA TOMOYUKI)
奈良女子大学・理学部・准教授
研究者番号：40377974
(連携期間：2008年度～2009年度)

石川 剛郎 (ISHIKAWA GOO)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50176161
(連携期間：2008年度～2009年度)

古谷 賢朗 (FURUTANI KENRO)
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：70112901
(連携期間：2008年度～2009年度)

待田 芳徳 (MACHIDA YOSHINORI)
沼津工業高等専門学校・教養科・准教授
研究者番号：90141895
(連携期間：2008年度～2009年度)

清原 一吉 (KIYOHARA KAZUYOSHI)
岡山大学・自然科学研究科・教授
研究者番号：80153245
(連携期間：2008年度～2009年度)

阿賀岡 芳夫 (AGAOKA YOSHIO)
広島大学・総合科学部・教授
研究者番号：50192894
(連携期間：2008年度～2009年度)

木曾 和啓 (KISO KAZUHIRO)
愛媛大学・名誉教授
研究者番号：60116928
(連携期間：2008年度～2009年度)

中西 靖忠 (NAKANISHI NOBUTADA)
岐阜経済大学・経営学部・教授
研究者番号：50124053
(連携期間：2008年度～2009年度)

片桐 民陽 (KATAGIRI MINYO)
奈良女子理学部・准教授
研究者番号：60263422
(連携期間：2008年度～2009年度)

