

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007-2008

課題番号：19540083

研究課題名 (和文) 幾何学的手法を基軸とした三次元多様体の研究とその広がり

研究課題名 (英文) Research on 3-manifolds based on geometric techniques and its expanse

研究代表者

小林 毅 (KOBAYASHI TSUYOSHI)

奈良女子大学・大学院人間文化研究科・教授

研究者番号：00186751

研究成果の概要：

片桐はリーマン計量全体の中の臨界リーマン計量に関して研究を行った。山下は2元生成メビウス変換群と3次元双曲幾何学との関連について研究を行った。小林は三次元多様体の Heegaard 分解, 写像類群を利用した流体の混合に関する研究を行った。これらに関して例えば, 高い Hempel 距離を持つ Heegaard 分解を許容する三次元多様体を境界で貼りあわせて得られる三次元多様体の既約な Heegaard 分解は必ずこれらの Heegaard 分解の融合 (amalgamation) になっていることが分かった, 等の結果が得られた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何

## 1. 研究開始当初の背景

2000年森元は次のような予想を提出した (Math. Ann. 317, 489-508)

森元予想：結び目  $K, K'$  に対してその連結和のトンネル数が超加法的になる (即ち  $t(K\#K') > t(K) + t(K')$ ) が成り立つ必要十分条件は  $K, K'$  が共に primitive meridian を許容しないことである。

これは結び目のトンネル数の微妙な振る舞いを記述したもので多くの数学者から注目

を集めている。これに関して研究代表者の小林は研究協力者の Yo' av Rieck 氏 (University of Arkansas) とともに結び目のトンネル数の growth rate (増加率) と呼ばれる概念を定義し, もしこの値が  $1/2$  より大きな結び目が存在すれば森元の予想の反例が構成できることを示した (Jour. für reine und angewandte Mathematik 592 (2006), 67-78)。また Rieck 氏との共著論文の中で, もしトンネル数 1 の結び目で①  $m$ -small で, ②種数 1 の 2-bridge position を許容しないようなものが存在すればその

growth rate は  $2/3$  以上になることを示した。従ってこの性質①、②を同時に満たすようなトンネル数 1 の結び目が存在するかどうかの問題になるが、当時、①に関して森元により種数 1 の 1-bridge position を許容しないトンネル数 1 の  $m$ -small な結び目の存在、②に関して Minsky-Moriah-Schleimer, Munoz, Johnson-Thompson により種数 1 の 2-bridge position を許容しないトンネル数 1 の結び目の存在、が続けてアナウンスされた。我々の手法で森元の予想が解決できる機運が高まっていた。

また結び目のトンネル数の連結和の下での振る舞いについては多くの研究がなされているがこれに関連して、Schultens-Weidemann は任意の自然数  $n$  に対して、最小種数 Heegaard 分解の組でその二つを境界のトーラスに沿って amalgamate (融合) すると、その結果として得られる Heegaard 分解は  $n$  回 destabilize できるようなものが存在することを示した。研究代表者小林は齋藤敏夫 (日本学術振興会特別研究員, 奈良女子大学) と共に結び目の連結和に関する同様の現象が起きることを、 $n=1$  の場合に限って、示すことができた。その副産物として森元の予想の反例を普遍量などによらない純粋に幾何学的な手法で構成できるのではないかと感触を得ていた。

## 2. 研究の目的

最近の Heegaard 理論の発展を見ていると Heegaard 理論やそれに係わるこれらの新しい技巧は、三次元の位相幾何学に対してまだまだ数多くの強力な証明の手法を提供できる可能性があるように思える。この研究の目的は

1) このような可能性を追求して具体的な未解決問題に対して適用してゆくとともに、

2) 最近の三次元多様体論の発展から逆に Heegaard 理論を初めとする幾何的トポロジーの研究に新しい視点や境地を提供する

ことである。

## 3. 研究の方法

小林は結び目のトンネル数や Heegaard 種数の連結和や amalgamation における振る舞いについての研究、及び森元氏によって用いられた、結び目の  $m$ -smallness の証明のための議論がどれだけ一般の設定で成り立つのかを研究協力者の Yo' av Rieck 氏や齋藤敏夫氏と協力して明らかにする。

山下は 1 つ穴開きトーラスに関する character variety の中に位置する BQ 集合を計算機により描画することおこなう。1 つ穴開きトーラスに関する character variety は、複素 3 次元であることが古典的に知られているが実際に上のような描画を行うには、複素 1 次元のスライスを描画となる。考えるスライスとしては、タイヒミュラー空間論において標準的に現れる Maskit スライス、Earle スライス、Riley スライス等が、候補として考えられ、その中の離散表現 (双曲多様体を与える表現) に対応する集合と、対応したスライスにおける BQ 集合との比較が課題となる。離散表現に対応する集合の境界は、フラクタル的になることがこれまで観察されており、BQ 集合に関する同様の現象が期待される。

片桐は、微分可能多様体上のリーマン計量の全体あるいは無限次元部分多様体上で定義された変分問題や微分方程式を考察する為の準備として多様体の構造、特に低次元多様体の位相構造に関する情報の収集、整理を行なう。特にここでは Perelman による幾何学化予想の証明の詳細を明らかにすることは重要である。

## 4. 研究成果

片桐はリーマン計量全体の中の臨界リーマン計量に関して研究を行った。山下は 2 元生成メビウス変換群と 3 次元双曲幾何学との関連について研究を行った。小林は三次元多様体の Heegaard 分解に関する研究を行った。これらに関して次の結果が得られた。

(1) 山下は 2 元生成メビウス変換群が「type preserving」という性質をみたす場合の性質を明らかにした。この条件をみたさない場合についてさらに研究を行うための計算機実験も行った。

(2) 小林は高い Hempel 距離を持つ Heegaard 分解を許容する三次元多様体を境界で貼りあわせて得られる三次元多様体の既約な Heegaard 分解は必ず上記の高い Hempel 距離を持つ Heegaard 分解の融合 (amalgamation) になっていることを示した。これはこのような多様体の Heegaard 分解には強い剛体性が成り立つことを示すものである。

(3) 小林は任意の三次元多様  $M$  が与えられたとき、その単体分割の 3 単体の個数に対して、ある定数  $C$  で次の条件を満たすものが存在することを示した。  $M$  の任意の種数が  $C$  以上の Heegaard 分解の Hempel 距離は 2 以下である。この事実は Schleimer によって既

に知られていたものであるが、本研究では、この  $C$  の値の評価を大幅に改良することに成功している。

(4) 小林は結び目のトンネル数が連結和で退化するとき、元のトンネルの和集合で与えられるトンネルが定める Heegaard 分解が destabilize できる必要十分条件を与えた。さらに具体的な例でそのような destabilization が実際におきているものがあることを示した。このような現象は今回始めて明らかになったものである。

(5) 片桐は、リーマン計量の接空間の直交分解とリーマン汎関数の臨界点についての関係について結果を得た。結果は現在論文 M. Katagiri, A decomposition of the space of Riemannian metrics and Riemannian functionals. としてまとめており、公表予定である。

(6) 小林は三次元多様体の二つの Heegaard splittings から定まる Rubinstein-Scharlemann graphic に関して Jesse Johnson が得ている結果 (mostly below region, mostly above region と disjoint な horizontal arc が存在する) の精密化を得る事に成功した。

(7) 山下は Right angled Artin group の自己同型群および内部自己同型群の語の問題の計算の複雑さについて、Arkansas 大学の Yoav Rieck 氏と研究を行い、計算の複雑さが多項式で評価可能であることを見出した。特に計算の具体的なアルゴリズムの記述を行い、それが容易に実現可能であることを示すことができた。また、情報圧縮に関する最近の研究成果に基づき、多項式の具体的な次数に関しても詳しい評価を行い、アルゴリズムが十分効率的なものであることを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① T.Kobayashi, and Y.Rieck, Knots with  $g(E(K)) = 2$  and  $g(E(K \# K \# K)) = 6$  and Morimoto's Conjecture, *Topology and its Appl.*, 156, 1114--1117, 2009, 査読有

② R.Furihata, T.Kobayashi, and M.Hirasawa Seifert surfaces in open books, and a new coding algorithm for links, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 40, 405--414, 2008, 査読有

③ T.Kobayashi, and Q.Ruifeng, The amalgamation of high distance Heegaard splittings is always efficient, *Math. Ann.*, 341, 707--715, 2008, 査読有

④ T.Kobayashi, and Y.Rieck, Knot exteriors with additive Heegaard genus and Morimoto's Conjecture, *Algebraic & Geometric Topology*, 8, 953--969, 2008, 査読有

⑤ Y.Yamashita, Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (1), *Lecture Notes in Mathematics*, 1909, 1-262, 2007, 査読有

⑥ T. Kobayashi, and S.Umeda, Realizing pseudo-Anosov egg beaters with simple mechanisms, *Proceedings of the International Workshop on Knot Theory for Scientific Objects held in Osaka*, 97--109, 2007

[学会発表] (計 8 件)

① Y. Rieck, Y. Yamashita, The word problem for the outer automorphism group of right-angled Artin groups, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2009年1月12日, 大阪大学

② 山下 靖, 2元生成メビウス変換群に関する Jorgensen と Bowditch の理論について, 第4回明治大学生田幾何セミナー, 2008年12月22日, 明治大学

③ Y. Yamashita, Computer experiments on the growth function of two-bridge link groups, *Geometry & Topology seminar*, 2008年11月6日, University of Warwick, UK

④ Y. Rieck, Y. Yamashita, The word problem for the automorphism and outer automorphism groups of a right-angled Artin group is solvable in polynomial time, 研究集会「Intelligence of Low Dimensional Topology」兼「拡大 KOOK セミナー」, 2008年10月7日, 大阪市立大学

⑤ 山下 靖, Dynamics of the modular group action on the  $SL(2, C)$  character variety of a one-holed torus, 複素力学系とその周辺分野の研究, 2007年9月7日, 京都大学数理解析研究所

⑥ 山下 靖, Limit elements in the configuration algebra for a discrete group III, 離散群と双曲空間の解析学とトポロジ

一, 2007年12月13日, 京都大学数理解析研究所

⑦ 小林 毅, Realizing Topological Chaos with Simple Mechanisms, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, 2007年5月31日, Snowbird Ski and Summer Resort Snowbird, Utah

⑧ 小林 毅, Distance of knots and Morimoto's Conjecture on the super additive phenomena of tunnel numbers of knots, Geometric Topology Conference, 2007年6月21日, Peking University, Beijing

[その他]

ホームページ

<http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamashita/>

<http://www.math.nara-wu.ac.jp/personal/tsuyoshi/index-j.htm>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小林 毅 (KOBAYASHI TSUYOSHI)

奈良女子大学・大学院人間文化研究科・教授  
研究者番号: 00186751

### (2) 研究分担者

山下 靖 (YAMASHITA YASUSHI)

奈良女子大学・理学部・准教授  
研究者番号: 70239987

片桐 民陽 (KATAGIRI MINNYOU)

奈良女子大学・理学部・准教授  
研究者番号: 60263422