

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540084

研究課題名 (和文) 階数1の対称空間上の幾何学

研究課題名 (英文) Geometry of symmetric spaces of rank one

研究代表者 前田 定廣 (Maeda Sadahiro)

佐賀大学・理工学部・教授

研究者番号：40181581

研究成果の概要 (和文)：

測地線を考察することにより、リーマン幾何学は発展してきたと言っても過言ではない。リーマン多様体上の数多ある滑らかな曲線の中で幾何学者は測地線を主に研究してきた。本研究においては、与えられたリーマン多様体の様々な性質を調べるために測地線を含む”良い”曲線を研究することを提案する。ところで任意のリーマン対称空間上では、全ての測地線は等長変換群の一径数部分群の軌道になっていることが知られている。そこで一般にリーマン多様体 M の等長変換群の一径数部分群の軌道になっている曲線を M のキリング螺旋と呼び、これらの幾何学的性質を明らかにすることを考える。キリング螺旋はあるキリングベクトル場の積分曲線であるから言うまでもなく単純、即ち自己交叉しない曲線である。

我々の研究では、まずある幾何学的対象物に関連したキリング螺旋を拾い出し、そのキリング螺旋を調べる。そして逆にキリング螺旋の性質を使って、幾何学的対象物を研究する。本研究における幾何学的対象物は部分多様体を指し示している。即ち、本研究では部分多様体に関連させてキリング螺旋を調べる。階数1の対称空間内の多くの等質部分多様体において、その部分多様体上のある測地線は、外側の空間内のキリング螺旋に写ることがある。これは階数1の対称空間上のキリング螺旋は部分多様体と関わりがあることを示唆している。

本研究ではまず部分多様体論を用いて、階数1の対称空間上のキリング螺旋を調べる。それから視点を逆にして、キリング螺旋の結果を部分多様体論に反映させることにする。

研究成果の概要 (英文)：

It is not too much to say that Riemannian geometry has been developed with the investigation of geodesics. Among many smooth curves on a Riemannian manifold geometers have mainly studied geodesics. In this research, we propose to study some families of “nice” curves containing geodesics in order to investigate some other properties of Riemannian manifolds. It is known that on an arbitrary Riemannian symmetric space every geodesic is an orbit of some one-parameter subgroup of its isometry group. Noticing this fact, we say that a curve on a Riemannian manifold M is a Killing helix if it is an orbit of some one-parameter subgroup of the isometry group of M , and we shed some light on the geometric study of them. Since they are integral curves of some Killing vector field, needless to say they are simple; namely, they do not have self intersection points.

Our program is to pick up some of the Killing helices in connection with some other geometric objects and study them or study other geometric objects by use of their properties. In this research we study Killing helices in connection with submanifolds. On many homogeneous submanifolds in a symmetric space of rank one, some kinds of geodesics are Killing helices if we consider them as curves on a symmetric space of rank one. This suggests to us that Killing helices are related to submanifolds when we study symmetric

spaces of rank one.

In the first half of this research, we obtain properties of Killing helices on a symmetric space of rank one which are obtained from the viewpoint of submanifolds. In the latter half, changing the point of view, we obtain properties of submanifolds obtained by making use of some properties of Killing helices on them.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2007年度 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |
| 2008年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 2009年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 2,900,000 | 870,000 | 3,770,000 |

研究分野：数学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：微分幾何学, 部分多様体, 曲線論, 実超曲面論

1. 研究開始当初の背景

測地線を考察することにより発展してきたリーマン幾何学では、曲線に関してはもっぱら測地線を研究の対象にしてきて、それ以外の曲線の研究が手薄であった。例えば、野水・矢野の論文 *On circles and spheres in Riemannian geometry, Math. Ann.* 219(1974), 163-170 などが挙げられるのみで、測地線以外の曲線論の研究は質、量ともに貧弱であった。

2. 研究の目的

本研究では測地線のみならず測地線を含むある曲線族を考察の対象とした。しかし測地線以外の曲線は、一般的なリーマン多様体 M^n 上では良い曲線とは限らない。そこで M^n として階数 1 の対称空間を取り、 M^n 上の良い曲線として等質曲線（即ち、 M^n の等長変換群の一径数部分群の軌道になっている曲線）を考える。階数 1 の対称空間 M^n の部分多様体論は発達しているので、それを道具にして M^n 上の等質曲線論を展開する。逆に M^n 上の等質曲線論で得られた成果を M^n の部分多様体論に反映させる。そうすることにより、測地線論に偏重したリーマン幾何学の曲線論に新しい知見を追加するのが、本研究の目的である。

微分幾何学では部分多様体論と殆ど絡まない研究が数多く見受けられるが、本研究ではそうではない。部分多様体に関する成果を得ることも大事であるが、部分多様体論を用いて幾何学研究を行うことを強く提唱して

いるのである。

3. 研究の方法

国内共同研究者である足立俊明（名工大工・教授）や宇田川誠一（日大医・准教授）それから Y. H. Kim（韓国・慶北大教育・教授）との研究連絡で雑誌論文を 9 編掲載した。同時に他研究者との研究連絡と本研究の成果報告を兼ねて、国内外で開催される学会、国際研究集会に積極的に参加し 20 回講演し、conference paper を 2 編著した。

これ以外で博士後期課程の学生に対して、本研究の科研費を用いて研究支援（書籍購入、アルバイト賃金支払い等）を行った。その共同研究成果は現在欧米の査読付きの学術誌に投稿中である。

4. 研究成果

研究成果の概要は既に述べているので、ここでは研究成果を個別に説明しよう。後述した 9 編の雑誌論文①から⑨までをそれぞれ簡単に解説する。

①ケーラー多様体 M^n が複素空間形 $M(c)$ になるための必要十分条件を M^n 内の測地球面 $G(r)$ を使って与えた。具体的に言うと、「 M^n 内の半径 r が十分小さい任意の測地球面 $G(r)$ に対して、 $G(r)$ 上の特性ベクトル場 ξ がキリングベクトル場になることが、 M^n が $M(c)$ になるための必要十分条件である」となる。

②非平坦複素空間形 $M(c)$ 内の測地球面 $G(r)$ 上の測地線でない等質曲線の例を大量に構成した。ここでは、「 $G(r)$ 上の曲線であり同時に $M(c)$ 内のケーラー円になる曲線を分類せよ」という問題を解いた。

③断面曲率に関するシュアの補題があり、そのケーラー版である補題も有名な結果である。この論文では、ケーラー版シュアの補題を更に一般化し、更にこれに付随してケーラー曲面を考察した。

④複素射影空間内の (A_1) 型等質実超曲面と (A_2) 型等質実超曲面は幾何的に良い共通な性質を持った実超曲面の例として知られている。この論文では、それらの実超曲面上の測地線を複素射影空間に身を置いて観察することにより、これら2つの等質実超曲面を識別した。

⑤ 複素射影空間と同様に、複素双曲型空間にも (B) 型等質実超曲面と呼ばれるものが存在する。これ自体、ただ一つ存在するものではなく、無限にある。この族に異なる主曲率を2個持つものがたった一つあり、他の (B) 型等質実超曲面は異なる主曲率を3個持っている。この論文では、異なる主曲率を2個持つ (B) 型等質実超曲面を特徴付けた。

⑥ (A_1) 型等質実超曲面と (A_2) 型等質実超曲面、いわゆる (A) 型等質実超曲面は複素射影空間内の実超曲面族において、極めて良い example である。この論文では、この例に特徴付けを与え、更に測地線を調べることにより、 (A_1) 型と (A) 型の識別を行った。

⑦球面を球面に全局的でなく第二基本形式が平行にはめ込む方法はただ一つであることが知られている。そうやって得られた球面内の部分多様体をペロネーゼ多様体と呼ぶ。この論文では、はめ込みの等方性、平均曲率ベクトルの平行性、断面曲率に関する不等式などを利用して、ペロネーゼ多様体の特徴付けた。

⑧複素射影空間は等質線職実超曲面を持たないが、複素双曲型空間には等質線職実超曲面は存在する。しかもただ一つ存在し、極小かつ non-Hopf 実超曲面なのである。この論文では、この線職実超曲面に対して幾何的特徴付けを与えた。

⑨ある意味論文②で得られた結果を別な見方で書き直した論文である。複素射影空間内の測地球面上に「佐々木曲線」なる等質曲線

を定義し、この曲線に関わる等質曲線論を展開した。

雑誌論文以外の研究成果として次の2編の研究集会原稿 (conference paper) を挙げることができる。いずれも World Sci. 社発行の単行本に収録されている。

① 前田定廣, 宇田川誠一 (日大医・准教授): Generalized Veronese manifolds and isotropic, immersions, Differential Geometry and its Applications, Proc. Conf., in Honor of Leonhard Euler, Olomouc, August 2007, World Sci., 197-202.

② 前田定廣: A characterization of Clifford minimal hypersurfaces in Terms of their geodesics, Topics in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, 2008, World Sci. 167-173.

注意 雑誌論文⑧の共同執筆者 Y.H. Kim 教授 (韓国・慶北大学教育) は、2009年12月にソウルで開催された大韓数学会で学術賞を受賞した。論文⑧が受賞理由の一つとなっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件) すべて査読有り

① T. Adachi and S. Maeda, Sasakian curves on hypersurfaces in a nonflat complex space form, Results in Math. 56 (2009), 489-499.

② T. Adachi, Y.H. Kim and S. Maeda, A characterization of the homogeneous minimal ruled real hypersurface in a complex hyperbolic space, J. Math. Soc. Japan 61(2009), 315-325.

③ S. Maeda and S. Udagawa, Characterization of parallel isometric immersions of space forms into space forms in the class of isotropic immersions, Canadian J. Math. 61(2009), 641-655.

④ T. Adachi and S. Maeda, Extrinsic geodesics and hypersurfaces of type (A) in a complex projective space, Tohoku Math. J. 60(2008), 597-605.

⑤ S. Maeda, A characterization of the

homogeneous real hypersurface of type (B) with two distinct constant principal curvatures in a complex hyperbolic space, *Sci. Math. Japonicae* 68(2008), 1-10.

⑥ T. Adachi and S. Maeda, Characterizations of type A_2 hypersurfaces in a complex projective space, *Bull. Aust. Math. Soc.* 77(2008), 1-8.

⑦ T. Adachi, S. Maeda and S. Udagawa, Schur's lemma for Kähler manifolds, *Arch. Math. (Basel)* 90(2008), 163-172.

⑧ T. Adachi, Y.H. Kim and S. Maeda, Geodesic spheres in a nonflat complex space form and their integral curves of characteristic vector fields, *Hokkaido Math. J.* 36(2007), 353-363.

⑨ T. Adachi and S. Maeda, Characteristic vector fields on geodesic spheres in a complex space form, *Bull. Calcutta Math. Soc.* 99(2007), 411-414.

[学会発表] (計20件)

- ① 前田定廣, 足立俊明 (名工大), 木村真琴 (島根大総理工) : 位数2の曲線と部分多様体論, 日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学, 2009年9月24日.
- ② 前田定廣, 足立俊明 (名工大), 亀田真澄 (山口東京理大工) : 部分多様体論から見た佐々木空間形の幾何学的意味, 日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学, 2009年9月24日.
- ③ 前田定廣 : Characterizations of standard real hypersurfaces and ruled real hypersurfaces in a nonflat complex space form, 第5回アジア数学会, クアラルンプール, マレーシア, 2009年6月23日.
- ④ 前田定廣, 足立俊明 (名工大) : 複素射影空間内の A_2 型超曲面の特徴付け, 日本数学会年会, 東京大学駒場キャンパス, 2009年3月26日.
- ⑤ 前田定廣, 宇田川誠一 (日大医) : 一般化されたペロネーゼ多様体と等方はめ込み, 日本数学会年会, 東京大学駒場キャンパス, 2009年3月26日.
- ⑥ 前田定廣 : Homogeneous curves on geodesic spheres in a complex projective space, 研究集会「測地線及び関連する諸問題」, 熊本大学教育学部, 2009年1月11日.

⑦ 前田定廣 : Geodesic spheres in a complex projective space from the viewpoint of submanifold theory in Euclidean space, コルカタ数学会100周年記念国際研究集会, コルカタ, インド, 2008年12月19日.

⑧ 前田定廣 : ユークリッド空間から眺めた複素射影空間内の測地球面上の等質閉曲線, 新潟微分幾何学研究集会「微分幾何学と複素構造」, 新潟大学五十嵐キャンパス, 2008年11月5日.

⑨ 前田定廣, 足立俊明 (名工大) : ユークリッド空間から眺めた複素射影空間内の測地球面上の等質閉曲線, 日本数学会秋季総合分科会, 東京工業大学, 2008年9月24日.

⑩ 前田定廣 : 非平坦複素空間形内の標準的実超曲面と線職実超曲面の特徴付け, 日本数学会秋季総合分科会, 東京工業大学, 2008年9月24日.

⑪ 前田定廣 : A characterization of Clifford minimal hypersurfaces of a sphere in terms of their geodesics, 国際研究集会 Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, Sophia, Bulgaria, 2008年8月27日.

⑫ 前田定廣, 足立俊明 (名工大), 宇田川誠一 (日大医) : ケーラー多様体に対するシューアの定理, 日本数学会年会, 近畿大学, 2008年3月23日.

⑬ 前田定廣 : クリフォード極小超曲面の特徴付け, 日本数学会年会, 近畿大学, 2008年3月23日.

⑭ 前田定廣 : 複素射影空間内の等質実超曲面の特徴付け, 高木亮一教授退官祈念研究集会「等質空間の不変構造と部分多様体」, 千葉工業大学, 2008年3月13日.

⑮ 前田定廣 : 球面内のクリフォード極小超曲面の特徴付け, 研究集会「部分多様体論・湯沢2007」, 新潟県湯沢町, 2007年11月23日.

⑯ 前田定廣 : 複素双曲型空間内のある2つの等質実超曲面の特徴付け, 広島幾何学研究集会, 広島大学理学部, 2007年10月12日.

⑰ 前田定廣 : 複素双曲型空間内の二つの等質実超曲面の特徴付け, 日本数学会秋季総合分科会, 東北大学, 2007年9月22日.

⑱ 前田定廣 : Characterization of parallel isometric immersions of space forms into space forms in the class of isotropic immersions I, II, 幾何学阿蘇研究集会, 休暇村南阿蘇, 2007年9月4日-5日.

- ⑱ 前田定廣, 宇田川誠一 (日大医):
Generalized Veronese manifolds and
isotropic immersions, 国際研究集会
DGA2007, Olomouc, チェコ共和国, 2
007年8月27日.
- ⑳ 前田定廣: 複素双曲型空間内のある2つ
の等質実超曲面の特徴付け, 数理解析
研究所研究集会「部分多様体論と可積分
系および幾何解析とのつながり」, 20
07年7月11日.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.saga-u.ac.jp/~smaeda/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

前田 定廣 (Maeda Sadahiro)
佐賀大学・理工学部・教授
研究者番号: 40181581

(2) 研究分担者

市川 尚志 (Ichikawa Takashi)
佐賀大学・理工学部・教授
研究者番号: 20201923

成 慶明 (Sei Keimei)
佐賀大学・理工学部・教授
研究者番号: 50274577

廣瀬 進 (Hirose Susumu)
佐賀大学・理工学部・准教授
研究者番号: 10264144