

平成 22 年 4 月 16 日現在

研究種目：基盤研究（C）  
研究期間：2007～2009  
課題番号：19540086  
研究課題名（和文） 距離空間の計算構造と次元及び解析集合論的複雑性の研究  
  
研究課題名（英文） On the structure of computability on metric spaces, dimension and the complexities of descriptive set theory  
研究代表者  
服部 泰直（HATTORI YASUNAO）  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号：20144553

研究成果の概要（和文）：本研究では、主に距離空間における計算可能性理論の位相的手法を用いた解析と、位相空間論及び位相空間における次元論に関する研究を行った。距離空間における計算可能性理論の研究においては、その形式的球体の順序構造と位相構造の関連を調べた。また、次元論に関しては、解析集合論を用いた次元関数（絶対ボレル集合族を法とする次元関数）の特性を調べ、それらの差異を示す反例の構成を行った。また、(超限) 帰納的次元の和定理、積定理の改良を行うと共に、位相空間論の立場から、局所コンパクト空間の有限和として表される空間について調べた。さらに、集合値写像に対する選択関数による強パラコンパクト空間の特性化定理を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied about the computability of metric spaces from the topological point of view. We also studied on set-theoretic topology and dimension theory of topological spaces. In particular, we studied the relations between the order and topological structures on the domains of the formal balls of metric spaces. Concerning dimension theory, we investigated the inductive dimension modulo absolute multiplicative class  $M(\alpha)$  and additive class  $A(\alpha)$ , and constructed the examples which show the differences of the values of these dimensions. We also improved the additive theorem and the product theorem for the inductive dimensions. We also considered the spaces which are finite union of locally compact subspaces and gave a characterization of strong paracompactness by means of the selection of multi-valued mappings.

交付決定額

(金額単位：円)

|         | 直接経費        | 間接経費     | 合 計         |
|---------|-------------|----------|-------------|
| 2007 年度 | 1, 100, 000 | 330, 000 | 1, 430, 000 |
| 2008 年度 | 600, 000    | 180, 000 | 780, 000    |
| 2009 年度 | 800, 000    | 240, 000 | 1, 040, 000 |
| 年度      |             |          |             |
| 年度      |             |          |             |
| 総 計     | 2, 500, 000 | 750, 000 | 3, 250, 000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー、情報基礎、距離空間、ドメイン、次元

1. 研究開始当初の背景 | 位相空間の次元概念は、平面と空間、より一

般に  $n$  次元ユークリッド空間の「違い」を説明するために、ルベグ、ブラウアーやポアンカレ等により発見された最も基本的位相不変量であり、「位相空間の次元」は、集合論的・幾何学的トポロジーの中心的トピックとしてトポロジーの創成期より今日まで活発に研究されてきた。そして、近年では、**Dranishnikov, Doverman, Dydak** 等によりコホモロジカル次元が飛躍的に発展すると共に、無限次元トポロジーも大きな発展を遂げつつあるなど、次元論は新たな展開を迎えている。また、情報理論・計算機科学への応用として、距離空間の計算モデルの構成など、ドメインの位相的手法を用いた解析等も研究されてきている。

## 2. 研究の目的

上記背景のもとで、情報基礎論、特に計算可能性理論・ドメイン理論の位相数学的手法を用いた研究と、距離空間や一般の位相空間における無限次元空間を含めた位相次元の解析、及び、可分距離空間における解析集合論の概念を用いた次元関数の解析等を行うことを目的として研究を行った。具体的には以下を目的として研究を行った。

(1) ドメインの位相数学的アプローチ。距離空間の計算モデルとして **Edalat** と **Heckmann** により導入された形式的球体からなるドメインの位相構造と順序構造の関連を明らかにすることを目的として研究を行った。特に、形式的球体上の **Lawson** 位相、**Martin** 位相と、形式的球体が自然に持つ直積位相の関連を明らかにすることを目的として研究を行った。

(2) 距離空間及び一般の位相空間における次元論の研究。コンパクト次数の一般化と考えられる絶対ボレル集合族を法とする（超限）帰納的次元関数の可分距離空間における振る舞いの解析、及び、帰納的次元の和定理、積定理の精密化とそれらの応用範囲の拡張を目的として研究を行った。

(3) 上記に関連した諸分野の研究。位相空間論、幾何学、力学系等における上記目的を補完するための研究を行った。

## 3. 研究の方法

上記目標 (1) については、立木秀樹（京都大学：19年度研究分担者、20、21年度連携研究者）と共同して研究を行った。研究機関中に数回、お互い訪問し合って詳細な研究連絡を行うとともに、日常的にはメール等により研究連絡を行い研究を進めた。また、研究を進める際には計算機科学及びドメイン理論については立木が主に、そして、その

位相的手法については服部が担当することにより研究を進めた。

上記目標 (2) については海外研究協力者の Vitalij Chatyrko (Linköping University, Sweden) との共同研究を中心に進めた。本研究期間中、計4回 Chatyrko が島根大学を訪れ、また、服部が2回 Linköping University を訪問するなどして、活発に研究連絡を行い、次元論に関する研究を進めた。さらに、絶対ボレル集合族を法とする（超限）帰納的次元関数の可分距離空間における振る舞いの解析における解析集合論に関しては、野倉嗣紀（愛媛大学：19年度研究分担者、20、21年度連携研究者）と学会や研究集会の折に研究連絡を行うなどして、また、古用哲夫（島根大学：19年度研究分担者、20、21年度連携研究者）とは日常的に連絡を取りながら研究を進めた。

上記目標 (3) については、横井勝弥（東京慈恵会医科大学：19、20年度研究分担者、21年度連携研究者）は、位相力学系に関する研究を、また、前田定廣（佐賀大学、19年度研究分担者、20、21年度連携研究者）と木村真琴（島根大学：19年度研究分担者、20、21年度連携研究者）は、幾何学的側面の研究を行い、山内貴光（島根大学：21年度研究分担者）と服部は位相空間論に関する研究を行った。

## 4. 研究成果

(1) 距離空間における計算構造を、距離空間における形式的球体上のドメインにおける位相構造を用いて解析した。距離空間  $(X, d)$  の一般化された形式的球体  $BX = X \times R$  に、 $(x, r) \sqsubseteq (y, s) \Leftrightarrow d(x, y) \leq r - s$  により半順序を入れる（すなわち、 $(x, r)$  をその中心が  $x$ 、半径が  $r$  の球体とみなし、球体の大きさの逆の順序を導入して  $BX$  を半順序集合とみなす）とき、 $BX$  は連続なドメイン（有向完備な半順序集合）となり、 $BX$  上に **Lawson** 位相、**Martin** 位相が導かれる。一方、距離空間  $X$  と実数直線  $R$  はそれぞれ自然な距離位相を内包しているので、 $BX$  には自然に  $X$  と  $R$  の直積位相が導入される。この観点から、 $BX$  における **Lawson** 位相、**Martin** 位相と、直積位相の関連（相違）について調べることは自然である。本研究において服部と立木はこの問題について研究し、以下の成果を得た。これらの結果は、国際研究集会等で発表しドメインに関する研究者の中では好評を得ており、他の研究者による以下の成果を参考にした研究発表もされてきている。

① 全有界な距離空間（従って、コンパクト距離空間についても）に対しては、形式的球体のドメインにおいて、直積位相と **Lawson** 位

相は一致することを示した。

② 一般的にはこの2つの位相が異なることを示す例を構成した。

③ 形式的球体のドメインBXにおいて、点(a, u)を頂点とする等距離集合（等高線集合） $Bd(a, u) = \{(y, s) : |a - y| = u - s\}$ を考える。このとき、Lawson位相に関する $Bd(a, u)$ の相対位相は点(a, u)の取り方によらずに定まることを示した。その上で、 $Bd(a, u)$ は自然にXと一対一の対応がつくことより、その対応によってXに位相が導いた（この位相を、距離空間(X, d)にの双曲位相と呼ぶことにした）。そして、距離空間(X, d)において双曲位相と距離位相が一致することと、BXにおいてLawson位相と直積位相が一致することが同値であることを示した。さらに、ノルム空間における強位相と双曲位相の関係を調べ、特に、ノルム空間 $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , における強位相と双曲位相が一致するための条件を次のように決定した：(a)  $1 < p < \infty$  ならば、強位相と双曲位相は一致する。(b)  $p = 1$ のとき、強位相と双曲位相が一致するための必要十分条件は、 $\mu(\Omega) = 0$ , または、 $\Omega$ がアトムからなる有限分割を持つことである。(c)  $p = \infty$ のとき、強位相と双曲位相が一致するための必要十分条件は、 $\mu(\Omega) = 0$ , または、 $\Sigma$ にアトムが存在することである。

④ 距離空間(X, d)の形式的球体からなるドメインBXにおけるMartin位相については、以下の結果等を得た：実数直線R上における形式的球体からなるドメインBR上にMartin位相を与え、BRにおける一点(a, u)を頂点とする2つの等距離集合（等高線集合） $Bd^+(a, u) = \{(y, s) : |a - y| = u - s\}$ と $Bd^-(a, u) = \{(y, s) : |a - y| = s - u\}$ を考える。このとき、 $Bd^+(a, u)$ と $Bd^-(a, u)$ のMartin位相に関する相対位相はR上の位相 $\tau^+$ と $\tau^-$ を自然に導く。このとき、 $\tau^+$ はSorgenfrey直線の部分空間 $(-\infty, 0]$ と、また、 $\tau^-$ はSorgenfrey位相と同相である。しかし、Lawson位相の場合のように等高線集合におけるMartin位相の相対位相が一点の取り方によらず定まるか、については未解決である。

(2) 次元論の近年の発展に沿い、距離空間を中心とした無限次元空間まで含めた位相次元の解析、および、可分距離空間における解析集合論からのアプローチによる次元関数の解析を、主に服部と海外研究協力者のChatyrkoが中心に行い、以下の成果を得た：

① 超限コンパクト次数 $trcmp$ が、距離空間全体のクラスにおいては上限を持たない。

② 可分距離空間Xにおける被覆次元 $\dim X$ を、

至るところ局所コンパクトでない0次元空間Yとの積 $X \times Y$ に対する $cmp(X \times Y)$ の値により決定できることを示した。

③ Charalambous-Chatyrkoによる小さい帰納的次元indに関する加法定理と、Chatyrko-Kozlovによる小さい帰納的次元indに関する積定理を改良し、これらの定理の無限次元空間への拡張を行った。

④ 可分距離空間におけるabsolute Borel classes を法とする有限、あるいは、超限次元関数 $A(\alpha)$ -trind,  $A(\alpha)$ -trInd,  $M(\alpha)$ -trind,  $M(\alpha)$ -trInd の振る舞いを解析し、深さの異なるabsolute Borel classes,  $A(\alpha)$  (additive Borel class) と $M(\alpha)$  (multiplicative Borel class) に関して、 $A(\alpha)$ -trindと $M(\alpha)$ -trindが、そして、 $A(\alpha)$ -trIndと $M(\alpha)$ -trIndの差異を示す可分距離空間 $X(\alpha)$ ,  $Y(\alpha)$ を構成した。さらに、 $A(\alpha)$ -trIndと $M(\alpha)$ -trIndに関してはより詳しく、以下の条件(i), (ii)を満たす任意の2つの関数 $a, m : \{\alpha : \alpha < \omega_1\} \rightarrow \{-1\} \cup \{\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{\infty\}$ に対して、 $A(\alpha)$ -trInd  $X = a(\alpha)$ ,  $M(\alpha)$ -trInd  $X = m(\alpha)$ を満たす可分距離空間Xが存在することを示した。

(i)  $a(0) \geq m(0) \geq \max\{a(1), m(1)\}$ ,

(ii)  $\min\{a(\alpha), m(\alpha)\} \geq \max\{a(\beta), m(\beta)\}$ , ただし、 $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$ .

⑤ 順序数 $\alpha$ に対して、 $\alpha = \lambda(\alpha) + n(\alpha)$ , ただし、 $\lambda(\alpha)$ は極限順序数、 $n(\alpha)$ は有限順序数、とする。このとき、 $n(\alpha) \geq 3$ となる任意の可算順序数 $\alpha$ に対して、

$A(\alpha)$ -trind  $X < A(\alpha)$ -trInd  $X$ ,

$M(\alpha)$ -trind  $Y < M(\alpha)$ -trInd  $Y$

となる可分距離空間X, Yが存在することを示した。

⑥ 小さい帰納的次元indの加法定理と積定理の評価の精密化を行った。

(3) トポロジーにおける基本的空間である局所コンパクト空間の有限和となる空間について調べ、チコフ空間Xのある(任意の)コンパクト化の剰余空間が局所コンパクト空間のn個の和となるための必要十分条件は、X自身がn個の局所コンパクト部分空間と一つのコンパクト部分空間の和として表されることであることを示した。また、逆に、Xがn個の局所コンパクト空間の和となるためには、Xのある(任意の)コンパクト化の剰余空間がn個の局所コンパクト空間の和となり、かつ、そのうちの 하나가コンパクトになることであることも示した。これは、1956年にHenriksen-Isbellによって得られたコンパクト化の剰余空間が局所コンパクトになるため

の特徴付けの自然な拡張である。この系として、局所コンパクト部分空間の有限和となる空間族は、完全写像に関して保存されることも示された。また、山内（島根大学：21年度研究分担者）は、位相空間の超空間位相について調べ、強パラコンパクト空間から完備距離空間への任意の下半連続な閉値写像が、0次元距離空間へのある種の上半連続コンパクト値写像と連続写像に集合値選択関数としてfactorizeされることを示し、強パラコンパクト性の集合値関数による特徴付けを与えた。また、前田と木村は、複素射影空間における均質的実超局面における曲率に関する研究を、横井はコンパクト空間上の連続関数に対する周期集合に関する成果を得た。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計12件）

- ① Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, Remainders in extensions and finite unions of locally compact sets, *Acta Mathematica Hungarica*, 査読有, to appear.
- ② Valentin Gutev, Takamitsu Yamauchi, Strong paracompactness and multi-selections, *Topology and its Applications*, 査読有, to appear.
- ③ Yasunao Hattori, Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces, *Memoirs Faculty Sci. Engi. Shimane Univ. Ser. B*, 査読無, Vol.43, 2010, pp.13--26.
- ④ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, On dimensional properties of the generalized Smirnov's spaces, *Topology and its Applications*, 査読有, Vol.157, 2010, pp.711--715.
- ⑤ Yasunao Hattori, Hideki Tsuiki, Hyperbolic topology of normed linear spaces, *Topology and its Applications*, 査読有, Vol.157, 2010, pp.77--82.
- ⑥ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, Transfinite large inductive dimensions modulo absolute Borel classes, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, Vol.61, 2009, pp.327--344.
- ⑦ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, Infinite-dimensionality modulo absolute Borel classes, *Bull. Polish Acad. Sci.*, 査読有, Vol. 56, 2008, pp.163--176.
- ⑧ Hideki Tsuiki, Yasunao Hattori,

Lawson topology of the space of formal balls and the hyperbolic topology, *Theoretical Comp. Sci.*, 査読有, Vol.405, 2008, pp.198--205.

- ⑨ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, Addition and product theorems for ind, *Topology and its Applications*, 査読有, Vol.155, 2008, pp.2202--2210.
- ⑩ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, There is no upper bound of small transfinite compactness degree in metrizable spaces, *Topology and its Applications*, 査読有, vol.154, 2007, 1314--1320.
- ⑪ Katsuya Yokoi, The chain recurrent set for maps of compacta, *Ann. Polon. Math.*, 査読有, vol. 92, 2007, pp.123--131.

〔学会発表〕（計6件）

- ① Takamitsu Yamauchi, Continuous selections for set-valued mappings with finite-dimensional values, Workshop on Geometric structures and Submanifolds, Chonnam National University (Korea) 2009年11月27日
- ② Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, （発表者：服部泰直）Remainders in extensions and finite unions of locally compact sets, 京都大学数理解析研究所研究集会「一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究」2009年10月15日
- ③ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, （発表者：服部泰直）Borel classes dimension and generalization of Smirnov's compacta, 京都大学数理解析研究所研究集会「一般・幾何学的トポロジーの研究動向と諸問題」京都大学、2008年10月8日
- ④ Yasunao Hattori, Hideki Tsuiki, （発表者：服部泰直）Lawson topology of the space of formal balls and the hyperbolic topology of a metric space, The 23th Summer Conference on Topology and its Applications, University of National Autonomous of Mexico, Mexico City, 2008年7月30日
- ⑤ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, （発表者：服部泰直）Dimensional properties of the generalized Smirnov's spaces, Advanced in Set-Theoretic Topology, International Center for Scientific Culture "E. Majorana", School of Mathematics "G. Stampacchia", Erice, Italy, 2008年6月12日

- ⑥ Yasunao Hattori, Hideki Tsuiki,  
(発表者：服部泰直) The hyperbolic  
topology of normed linear spaces,  
International Conferences in  
Topology and its Applications 2007  
at Kyoto, Jointly with 4th Japan-  
Mexico Topology Conference, 京都大学,  
2007年12月5日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

服部 泰直 (HATTORI YASUNAO)  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号：20144553

### (2) 研究分担者

立木 秀樹 (TSUIKI HIDEKI)  
京都大学・大学院人間・環境学研究科・  
准教授  
研究者番号：10211377  
(H20→H21:連携研究者)

横井 勝弥 (YOKOI KATSUYA)  
東京慈恵会医科大学・医学部・教授  
研究者番号：90240184  
(H21:連携研究者)

前田 定廣 (MAEDA SADAHIRO)  
佐賀大学・理工学部・教授  
研究者番号：40181581  
(H20→H21:連携研究者)

木村 真琴 (KIMURA MAKOTO)  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号：30186332  
(H20→H21:連携研究者)

野倉 嗣紀 (NOGURA TSUGUNORI)  
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：00036419  
(H20→H21:連携研究者)

古用 哲夫 (FURUMOCHI TETSUO)  
島根大学・総合理工学部・教授  
研究者番号：40039128  
(H20→H21:連携研究者)

山内 貴光 (YAMAUCHI TAKAMITSU)  
島根大学・総合理工学部・講師  
研究者番号：00403444

