

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540087
 研究課題名（和文） 連続関手の概念による一般コホモロジー理論の再構築
 研究課題名（英文） Reconstruction of generalized cohomology theories
 by means of the notion of continuous functors
 研究代表者
 島川 和久（SHIMAKAWA KAZUHISA）
 岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
 研究者番号：70109081

研究成果の概要(和文)：ホモトピー論を展開する上で極めて有効な諸性質を満たす位相空間(数値生成位相空間)の圏を構成し、その枠組みを利用して、一般コホモロジー理論を双変関手の概念を用いて定義する方法を確立した。この構成法は、スペクトラムを用いて一般コホモロジーを定義する従来の構成法に比べてよりシステマチックであり、また、位相空間以外の圏へ拡張することも容易であるため、応用上の可能性もより広がるものと期待される。

研究成果の概要(英文)：We constructed a category of topological spaces which satisfies the properties suitable for developing homotopy theory, and used it to establish a method for defining generalized cohomology theories by means of the notion of bivariant functors. In comparison with the conventional construction given by spectra, our new construction is more systematic and is easier to extend to categories other than that of topological spaces; hence we may expect it to be applied to a variety of problems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学、ホモトピー論、一般コホモロジー

1. 研究開始当初の背景

コボルディズム理論は一般コホモロジー理論の代表例の一つであり、幾何学的応用の面からも重要な研究対象である。しかし、K理論などとは異なり、既存の infinite loop space

で、その表現スペクトラムを構成することはできない。研究代表者は、有限点集合を相対コンパクトな多様体に置き換えることによって一般化した「ラベル付き配置空間」の概念を用いて、Dold-Thom の流儀でコボルディ

ズム理論を構成しようと考えた。これが本研究計画を着想するに至った背景である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、スペクトラムに代わるより使い易い概念を導入して安定ホモトピー圏を再構成することである。そのためにまず、基点付き空間の圏からそれ自身への連続関手を考察し、それが一般(コ)ホモロジーを表現するための十分条件を求める。次いで、そのような連続関手の全体のモデル圏構造を決定し、そのホモトピー圏を記述する。

3. 研究の方法

(1) 連続関手の理論を展開するための枠組みとして最も相応しい位相空間の圏を構成する。必要要件として、完備性、余完備性。デカルト閉性に加え、付随する基点付き空間の圏が、スマッシュ積に関してモノイド閉であることを課す。

(2) 然るべき条件を満たす連続関手が一般ホモロジー理論を与えること、および逆に、すべての一般ホモロジー理論がそのような連続関手で表現されうることを厳密に証明する。さらに、可能であれば、そのような連続関手からなる圏に閉モデル圏構造を導入し、それに付随するホモトピー圏が、スペクトラムの圏から定まるそれと同値であることを示す。

(3) 双変関手が一般コホモロジーを与えるために最も適切な条件を決定し、そのような条件を満たす双変関手の圏が、一般ホモロジーを定める連続関手の圏と、(したがって、スペクトラムの圏とも)同値であることを示す。

(4) スペクトラムの代わりに連続関手を用いて、コホモロジー理論の A_{∞} あるいは E_{∞} 構造をより簡明な形で記述し、その幾何学的問題への応用を試みる。

4. 研究成果

(1) 当初の想定とは若干異なる形ではあるが、我々の理論構成にとって最適と思われる位相空間の圏を構築することができた。すなわち、ユークリッド空間の開領域からの連続写像すべてに関する始位相を位相に持つような空間を「数値生成空間」とよぶとき、数値生成空間とその間の連続写像からなる圏は、研究方法(1)に挙げた条件をすべて満た

す。さらに、この圏は位相空間の充満部分圏であるだけでなく、自然な方法で微分空間の圏の充満部分圏と見なすことができることを示した。

(2) 数値生成空間の圏からそれ自身への連続関手が、ホモトピー群をとる操作を経由して一般ホモロジー理論を定義するための条件を、完全性条件という極めて簡明な形で与えた。次に、この連続関手の一般化である双変連続関手の概念を導入し、それが一般コホモロジー理論を定義するための条件(双完全性条件)を定式化した。このとき、双変関手の共変部分は完全連続関手であり、したがって一般ホモロジーを定義する。すなわち、双完全関手は、一般ホモロジー理論と一般コホモロジー理論の双方を統合した双変理論を与えるものとなっている。

(3) 上記(2)の具体例として、吉田耕平は、チェック・コホモロジーを定義する双完全関手を構成し、さらに、それに付随するホモロジーが Steenrod ホモロジーに密接に関連していることを示した。

(4) 上記研究に関連して、連携研究者の三村護は以下の研究を展開した。

- ① 様々な空間の Lusternik-Schnirelmann カテゴリーの決定
- ② 例外リー群の分類空間のコホモロジーに対する Rothenberg-Steenrod スペクトル系列の研究

(5) 鳥居猛は、異なるクロマティック・ハイトをもつ $K(n)$ 局所化圏の間の関係について研究を進めるため、Chern 指標の一般化にあたる概念を導入し、それが E_{∞} 射に持ちあがることを示した。さらに、これを用いて、Morava E 理論および Morava 安定化群の作用がハイトの一つ低い Morava E 理論および Morava 安定化群の作用を決定することを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

- ① Takeshi Torii, On E_{∞} -structure of the generalized Chern character, Bull. London Math. Soc., in preparation, 査読有
- ② Takeshi Torii, HKR characters, p-divisible groups and the generalized Chern character, Trans. Amer. Math. Soc., in preparation, 査読有

- ③ Takeshi Torii, Comparison of Morava E-theories, Math. Z., in preparation, 査読有
- ④ Mamoru Mimura and Kei Sugata, On the Lusternik-Schnirelmann category of symmetric spaces of classical type, Groups, homotopy and configuration spaces, 323-334, Geom. Topol. Monogr., vol.13, 2008, 査読有
- ⑤ Masaki Kameko and Mamoru Mimura, On the Rothenberg-Steenrod spectral sequence for the mod 2 cohomology of classifying spaces of spinor groups, Groups, homotopy and configuration spaces, 261-279, Geom. Topol. Monogr., vol.13, 2008, 査読有
- ⑥ Hiroyuki Kadzisa and Mamoru Mimura, Cartan models and cellular decompositions of symmetric Riemannian spaces, Topology Appl., vol.156 (2008), no.2, 346-364, 査読有
- ⑦ Takeshi Torii, Molnor operations and the generalized Chern character, Geom. Topol. Monogr., vol.10 (2007), 383-421, 査読有
- ⑧ Shingo Okuyama and Kazuhisa Shimakawa, Interactions of strings and equivariant homology theories, Geom. Topol. Monogr., vol.10 (2007), 333-346, 査読有
- ⑨ Kazuhisa Shimakawa, Labeled configuration spaces and group completions, Forum Math., vol.19 (2007), 353-364, 査読有

[学会発表] (計41件)

- ① 島川和久, 微分空間とホモトピー論、日本数学会年会特別講演、2010年3月25日、横浜市
- ② 奥山真吾、不変式論と格子点ソフトウェア **LattE**、数学ソフトウェアとフリードキュメント X、2010年3月23日、横浜市
- ③ 奥山真吾、格子点ソフトウェア **LattE** の不変式論への応用、山梨大学医学部数学セミナー、2010年2月18日、甲府市
- ④ 鳥居猛、On a generalization of the Chern and the comparison of Morava E-theories、第5回代数・解析・幾何学セミナー、2010年2月17日、鹿児島
- ⑤ 鳥居猛、HKR characters, p-divisible groups and the generalized Chern character、代数幾何とホモトピー論の新展開、2009年11月5日、東京
- ⑥ 加治佐博幸、三村護、Morse-Bott 理論と LS-cat への応用、ホモトピー論シンポジウム、2009年11月2日、姫路市
- ⑦ 鳥居猛、Hecke operators in Morava

E-theories and the generalized Chern character、ホモトピー論シンポジウム、2009年11月1日、姫路市

- ⑧ 島川和久、吉田耕平、数値的連続写像を射とする位相空間の圏のカルテシアン閉性について、日本数学会年会一般講演、2009年3月28日、東京
- ⑨ 鳥居猛、Bousfield-Kan spectral sequence for computing E- ∞ -maps、信州トポロジー小研究集会、2009年3月17日、松本
- ⑩ 島川和久、Topology と Diffeology、ホモトピー論シンポジウム、2008年12月5日、高松
- ⑪ 島川和久、吉田耕平、Numerical continuity and Cartesian closedness、LS カテゴリーと Robot Motion Planning、2008年10月30日、唐津市
- ⑫ 加治佐博幸、三村護、SU(n)/SO(n) と SU(2n)/Sp(n) の cone decompositions、LS カテゴリーと Robot Motion Planning、2008年10月30日、唐津市
- ⑬ Mimura Mamoru, Characteristic classes for the exceptional Lie groups, KAIST colloquium talk, Sep 19, 2008, Korea
- ⑭ Mimura Mamoru, Stiefel-Whitney classes for , Mini conference on Transformation Groups at KAIST, Aug 29, 2008, Korea
- ⑮ 島川和久、Diffeology について、変換群の幾何とその周辺、2008年5月21日、京都
- ⑯ 島川和久、Yet another approach to generalized cohomology theories、ホモトピー論シンポジウム、2007年11月15日、金沢
- ⑰ 島川和久、Recognizing equivariant homology and cohomology theories、変換群の理論とその応用、2007年5月29日、京都

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年月日：
 国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.okayama-u.ac.jp/~kazu/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

島川 和久 (SHIMAKAWA KAZUHISA)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：70109081

(2) 研究分担者

三村 護 (MIMURA MAMORU)
岡山大学・名誉教授
研究者番号：70026772
(H20→H21：連携研究者)
奥山 真吾 (OKUYAMA SHINGO)
香川高等専門学校・情報工学科
研究者番号：50290812
(H20→H21：連携研究者)

(3) 連携研究者

鳥居 猛 (TORII TAKESHI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：30341407