

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540089
 研究課題名（和文） 双曲型結び目の例外的デー手術とその配列に関する研究
 研究課題名（英文） Exceptional Dehn surgeries on hyperbolic knots and their arrangement
 研究代表者
 寺垣内 政一（TERAGAITO MASAKAZU）
 広島大学・大学院教育学研究科・准教授
 研究者番号：80236984

研究成果の概要（和文）：3次元球面内の双曲型結び目に対して、非双曲的な3次元多様体を生成するデー手術を例外的デー手術とよぶ。例外的デー手術は本質的に3種類あるが、そのうち、レンズ空間を生じるレンズ手術、本質的トーラスを生じるトロイダル手術の2種の手術に焦点を絞って研究を行い、3つの連続する整数トロイダル手術を許容する双曲型結び目の無限列の構成、レンズ手術の前後にトロイダル手術を許容する双曲型結び目の無限列の構成など、いくつかの成果を得た。

研究成果の概要（英文）：For a hyperbolic knot in the 3-sphere, Dehn surgery yielding a non-hyperbolic 3-manifold is called an exceptional Dehn surgery. There are essentially three types of exceptional Dehn surgery. In this project, we focused on lens space surgery and toroidal surgery, and obtained various results. In particular, I gave an infinite family of hyperbolic knots admitting toroidal surgeries corresponding to three consecutive integers, and an infinite family of hyperbolic knots admitting lens space surgery between toroidal surgeries.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目, 3次元多様体, デー手術

1. 研究開始当初の背景

結び目理論・3次元多様体論において、デー手術の研究は、国内外を問わず著しく発展してきた。デー手術とは、3次元多様体

に含まれる結び目あるいは絡み目の近傍をいったん摘出し、違った形で埋め直すことによって、元の多様体とは異なる3次元多様体を作り出す操作である。特に、3次元球面内の適当な絡み目にデー手術を施すことに

より、任意の向き付け可能な閉3次元多様体
が得られるという事実は、3次元多様体論に
おけるデーネ手術の果たす役割の重要性を
示すものである。結び目・絡み目の世界と3
次元多様体の世界をつなぐ架け橋の役割を
果たすのがデーネ手術であるといってもよ
い。

3次元多様体内の結び目の補空間が双曲
幾何構造を許容する、いわゆる双曲的多様体
であるとき、その結び目を双曲型という。双
曲型結び目に対してデーネ手術を行った場
合、有限個の例外を除いて、再び双曲的3次
元多様体を生じることが知られており、現在
のデーネ手術研究の中心課題は、非双曲的3
次元多様体を生じる例外的デーネ手術の分
析である。

研究開始時、ヘガード・フロアー・ホモロ
ジー理論から、デーネ手術に関する著しい成
果がもたらされていた。特に、本研究課題に
含まれるレンズ手術での進展は顕著であり、
研究代表者と分担者が予想した、レンズ手術
を許容する結び目のファイバー性が肯定的
に解決されたことを初めとして、レンズ手術
のパラメーターと結び目の種数の関係につ
いての予想に対しても、期待される最良評価
に迫ったものが得られていた。しかしながら、
レンズ手術に関する基本問題は、レンズ手術
を許容する結び目の決定であり、ジョン・バ
ーギの導入した結び目のクラスがそのよう
な結び目の全てを与えるという20年来の
予想は、未解決のままとなっていた。

ザイフェルト手術に関して、ヘガード・フ
ロアー・ホモロジー理論からの成果はそれほ
ど顕著ではない。国外においてはカラー・シ
ャーレン理論を駆使したボイヤー、ジャンら
による研究、国内においては宮崎（東京電機
大学）、茂手木（日本大学）らによる研究の
蓄積がある。宮崎、茂手木らによるザイフェ
ルター理論は、個々のザイフェルト手術を調
べるのではなく、ザイフェルト手術全体をネ
ットワークとして捉えるという画期的なアイ
デアを導入し、いくつかの新しい成果を生
み出しつつあった。

研究代表者は2006年度までの研究に
おいて、トロイダル手術の分析に成果をあげ
てきたが、同じ研究手法を用いる国外の研究
者たちとの激しい競争状態にあった。一方、
多くのトロイダル手術に対して、上述のザイ
フェルターの類似概念を導入できることが
わかった。これにより、レンズ手術、ザイフ
ェルト手術、トロイダル手術をまとめて捉え
るという視点が生まれ、全体構想に挙げた例
外的デーネ手術の配列という独創的な着想
を得るに至った。すでに、2006年度の研究
において、ペンタングルを利用する複数の
例外的デーネ手術を許容する結び目を機能
的に生み出す構成法を考案した。

2. 研究の目的

3次元球面内の双曲型結び目に対して、非
双曲的3次元多様体を生み出す例外的デー
ネ手術は、生じる3次元多様体のクラスに従
って、次の4種類に分類される。

- (1) レンズ空間を生じるレンズ手術
- (2) 球面を底空間とし、3本の特異ファイ
バーをもつザイフェルト多様体を生じる
ザイフェルト手術
- (3) 圧縮不可能なトーラスを生じるトロ
イダル手術
- (4) 可約な多様体を生じる可約手術

このうち、(4)は起こりえないと予想さ
れている。従って本研究では、(4)を除く
各々の例外的デーネ手術に関して、これまで
の研究を発展させることを第一の目標とす
る。また、双曲型結び目に対する例外的デー
ネ手術は、ある特別な結び目の系列を除けば、
整数をパラメーターにもつと期待されてお
り、しかも既知の例では全て連続した整数に
対応して出現している。(たとえば、ある結
び目に対して、連続整数0, 1, 2に対応し
た手術が例外的といった状況をいう。)そこ
で、(1), (2), (3)の3種類の手術を個
別に扱うのではなく、双曲型結び目に対し
て出現する例外的デーネ手術の配列に関し
て、その連続性や出現パターンについて探求
することを第二の目標とする。

3. 研究の方法

研究代表者が主たる研究の推進を行った。
また、分担者との意見交換を随時行った。国
内で開催される日本数学会や結び目理論、低
次元トポロジーの研究集会に出席し、デー
ネ手術を研究テーマとする国内の研究者との
意見・情報の交換を行った。さらに、デー
ネ手術研究の世界的権威であるメキシコ自
治大学のエウダベ・ムニョス博士の招待を受
けて、2008年度に2週間、同博士を訪問し、
本研究課題について意見の交換を行った。

4. 研究成果

3年間の主な成果を、項目ごとにまとめる。
(1) 双曲型結び目の許容するトロイダル手
術の個数は、エウダベ・ムニョスによつて
高々3個と予想されていた。さらに、実際に
3個のトロイダル手術を許容する結び目は、
8の字結び目と(-2, 3, 7)プレッツェル結
び目しか知られていなかった。本研究におい
て、3つの連続した整数スロープがトロイダ
ル手術であるような双曲型結び目を無限個
構成することに成功した。現時点では、双
曲型結び目の許容するトロイダル手術の個数

への上界として4という値が知られている。最良上界として期待される3への改善も重要な課題であるが、一方で、実際に3個のトロイダル手術を許容する結び目は今回構成したものを含めればすべてではないかと期待される。

(2) 双曲型結び目のトロイダル手術に対して、デーン手術で生じる本質的トーラスと手術のコアとの最小交点数を、そのトロイダル手術のヒット数と定義する。種数1の結び目の0手術は、明らかにヒット数1のトロイダル手術を与える。ほとんどのトロイダル手術は、ヒット数2であり、ヒット数4のものがエウダベ・ムニョスによって構成されていたことと、オソイナックによって、いくらでも高いヒット数の存在が示されていた。本研究では、オソイナックの構成を精査して、任意の偶数がヒット数として実現可能であることを示した。6以上のヒット数を実現する例は、ここで構成した例しか知られておらず、他にそのようなトロイダル手術を許容する結び目の存在あるいは非存在が今後の課題となる。

(3) デーン手術によって、同相なレンズ空間を生じるような結び目の組を無限個構成した。特に、組を構成する2つの結び目のタイプとして、トーラス型、サテライト型、双曲型のいずれも可能であるが、唯一の例外として、両方をサテライト型にはとれないことを証明した。同相なレンズ空間を手術によって生成することができる結び目は高々2つであると予想する。

(4) ボイヤーとジャンによって、双曲型結び目が巡回手術をもつとき、その前後の整数スロープでデーン手術を行って得られる多様体の少なくとも一方は、ハーケン多様体ではないと予想されていた。これは、非整数的境界スロープの存在のための十分条件として、彼らが示した事実から自然に期待されたことだった。これに対して、ペンタングルを使った構成により、巡回手術の前後の整数スロープがいずれもトロイダル手術であるような双曲型結び目を無限個与えることに成功した。これは、上述の予想に対する反例である。

(5) 双曲型結び目のトロイダル手術に対して、ヒット数が4であるものは、エウダベ・ムニョスによって構成されたものしか知られていなかった。特に、それらは可逆な結び目であった。本研究において、非可逆な双曲型結び目で、ヒット数4のトロイダル手術を許容するものを無限個構成した。

(6) 境界にトーラス成分をもつ双曲的3次元多様体に対して、そのトーラス境界成分においてデーン手術を行った際、本質的トーラスが生成され、そのような2つの手術の距離が3以上であるならば、もともとの双曲的3

次元多様体の境界は高々3つのトーラス成分からなることを証明した。これにより、境界が4つ以上のトーラス成分のみからなる双曲的3次元多様体において、各トーラス境界成分上には、例外的スロープが4つ以下しかないことが結論される。実際に、この評価が最良であることも示した。本成果は、デーン手術研究を20年以上に渡って先導してきたゴードン博士が提唱した、境界がトーラスのみからなる双曲的3次元多様体のスモールな例外的デーン手術間の距離の決定というプログラムに対して、最後の未解決部分を埋めるものであった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

① 寺垣内政一, Cyclic surgery between toroidal surgeries, *Canad. Math. Bull.*, 査読有, 印刷中.

② 斎藤敏夫, 寺垣内政一, Knots yielding homeomorphic lens spaces by Dehn surgery, *Pacific J. Math.* 244, no.1 (2010), 169-192, 査読有.

③ 寺垣内政一, Toroidal Dehn surgery on hyperbolic knots and hitting number, *Topology Appl.* 157, no.1 (2010), 269-273, 査読有.

④ Sangyop Lee, 寺垣内政一, Boundary structure of hyperbolic 3-manifolds admitting toroidal fillings at large distance, *Math. Ann.* 344 (2009), 119-159, 査読有.

⑤ 寺垣内政一, Non-invertible knots having toroidal Dehn surgery of hitting number four, *Hiroshima Math. J.* 38, no.3 (2008), 447-454, 査読有.

⑥ 寺垣内政一, Hyperbolic knots with three toroidal Dehn surgeries, *J. Knot Theory Ramifications* 17, no.9 (2008), 1051-1061, 査読有.

[学会発表] (計5件)

① 寺垣内政一, Knots obtained from the minimally twisted five chain link and lens space surgery, Workshop 「Simplicial Complexes Arising in Low-Dimensional Topology」, 2009年7月2日, 東京工業大学.

② 寺垣内政一, Knots yielding homeomorphic lens spaces by Dehn surgery, 国際研究集会「Knots in Washington」, 2009年1月10日, George Washington University.

③ 寺垣内政一, Knots yielding homeomorphic

lens spaces by Dehn surgery, 研究集会
「Intelligence of Low Dimensional
Topology」, 2008年10月7日:大阪市立大学.

④寺垣内政一, Hyperbolic knots with three
toroidal Dehn surgeries, 国際会議
「International Conference on Topology
and its Applications 2007」, 2007年12月
7日, 京都大学.

⑤寺垣内政一, Hyperbolic knots with three
toroidal Dehn surgeries, 日本数学会秋季
総合分科会, 2007年9月21日, 東北大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

寺垣内 政一 (TERAGAITO MASAKAZU)
広島大学・大学院教育学研究科・准教授
研究者番号: 80236984

(2) 研究分担者

合田 洋 (GODA HIROSHI)
東京農工大学・大学院共生科学技術研究
院・教授
研究者番号: 60266913
(H19→H20: 連携研究者)

(3) 連携研究者