様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月　４日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００７～２００９
課題番号：１９５４００９１
研究課題名（和文）平坦な幾何構造を許容する等質空間の不変量による特徴付け

研究課題名（英文）Characterization of homogeneous spaces admitting flat geometric structures by means of invariants

研究代表者
阿賀岡　芳夫（AGAOKA YOSHIO）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：５０１９２８９４

研究成果の概要（和文）：等質空間、特にリー群上に平坦な幾何構造が存在するための条件について不変式論的立場からの研究を行った。本研究では、幾何構造として射影構造、及び擬リーマン構造を中心に取り扱い、平坦な幾何構造が存在するための必要条件をいくつかの場合について求めることに成功した。また、平坦な射影構造の新たな例を表現論的に構成し、更に３次元リー群上における概平坦な擬リーマン構造の存在・非存在性についてもすべて決定した。

研究成果の概要（英文）：We study several conditions on homogeneous spaces (or Lie groups) in order that they admit flat geometric structures from the standpoint of invariant theory. In this research, we treat mainly projective and pseudo-Riemannian structures, and we succeed to obtain several necessary conditions to admit flat geometric structures for some cases. We also construct new homogeneous spaces admitting flat projective structures by using representation theory, and in addition, determine the existence or non-existence of almost flat pseudo-Riemannian structures on each 3-dimensional Lie group.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	９００，０００	２７０，０００	１，１７０，０００
２００８年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
２００９年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
年度			
年度			
総　計	２，５００，０００	７５０，０００	３，２５０，０００

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分幾何

１．研究開始当初の背景

微分幾何学においては、古来様々な空間における種々の幾何構造の存在・非存在性が問題にされ、多くのことが調べられてきた。本研究はこの中で特に「平坦」な幾何構造に焦点をあて、空間の大域的不変量を用いてこの構造の存在・非存在性を決定する方法に取り組むものである。

多様体は局所的にはユークリッド空間と同相であるため、局所的には常に平坦な幾何構造が存在する。しかし大域的にはほとんどすべての多様体上には位相的な理由で平坦

な幾何構造は存在せず、平坦な幾何構造の存在・非存在性を問う問題は多様体の位相的な状況と幾何学的性質の絡み合う大域微分幾何学における重要な問題の一つである。しかし、この問題に取り組むために用いることのできる道具は限られたもの（いわゆる、古典的な特性類、あるいは低次元リー群・等質空間の分類結果など）しかなく、また断片的な結果しか知られていなかったのが研究開始当初の状況であった。
　本研究は、特に多様体として等質空間、あるいはリー群に話を限定することにより、リー環の表現・不変式等代数的な手法を用いることを可能にし、この新たな視点から問題解決を目指そうとするものである。

２．研究の目的
　本研究においては、平坦な幾何構造の存在・非存在性に関して次のような側面からの研究を行う。

(1) 取り扱う幾何構造としては、射影構造、及び(擬)リーマン構造を考えることとする。射影構造は、いわゆる G 構造的見地からすると種々ある(有限型)幾何構造の中では最も大きな構造群を有するものであるため、一般に平坦な幾何構造が他のものと比べ存在しやすい状況にある。また表現論的見地から見ても最も扱いやすいものである。また(擬)リーマン構造は幾何学者とって最もなじみの深い幾何構造である。これらの理由により、研究をこの二つの幾何構造から開始するのは自然な手順といえる。

(2) これらの各幾何構造に対し、与えられた等質空間・リー群上に不変で平坦な構造が存在するか否かを、個別的ではない、統一的な手法でもって判定する方法を編み出すことを目的とする。そのためには、ある普遍的な不変量を見つけ出し、その量を計算することにより平坦な幾何構造の存在・非存在性を判定する、という枠組みを構成する。

(3) この不変量を見出すために、リー環の表現論に現れる plethysm という一種の合成積を計算し、その中で幾何学的に有用な不変式を取り出す手法を編み出す。

(4) 特に低次元の等質空間・リー群上でこの不変量を具体的に計算し、リー群のもつ代数的な性質と幾何構造との相性の善し悪しをこの不変量を通じて理解する。そしてその上で、平坦な幾何構造の存在・非存在性を具体的に判定する。

(5) 話の順序として低次元のリー群から順に調べ始めるが、ある程度のデータが集まった段階で、高次元(一般次元)の場合についての見通しについて考察することにする。

３．研究の方法

(1) この研究を遂行するためには、幾何学のみならず、リー環の表現に関する成果を駆使しなければならない。例えば単純リー環の既約表現の分類についてはよく知られているが、その合成積の plethysm の分解公式については簡単に取り扱える場合を除いて、まだほとんど何も知られていない状況である。そのため、我々の研究に必要なケースについて、この分解公式を計算し、その中で幾何学的に有用な不変式を取り出すことにする。必要であれば、計算機を援用しつつ具体的な計算を推し進める。

(2) 低次元の場合の結果を記述するためには、よく知られているリー環の分類表に現れる標準型では不十分である。リー環の変形・退化に適合した標準型を用いないことには、幾何構造との関連性が見えてこない。そのために、低次元リー環の分類結果について我々の視点から考察し直す。

４．研究成果
　本研究期間中得られた主要結果を以下にまとめる。

(1) リッチテンソルの恒等式
　リー群上の左不変平坦な擬リーマン計量が存在するための障害として、リッチテンソルの恒等式が役にたつことが私の過去の研究で解明されていたが、それを３次元ユニモジュラーリー環の場合に具体的に求めることに成功した。従来の研究により、これは個別には知られていたのであるが、リー環の分類結果を用いず一般的に成り立つ恒等式として把握することができるようになった。その結果、左不変で概平坦な擬リーマン計量をもつ３次元ユニモジュラーリー群のリー環 g は［g,g］の次元が２以下になることが示された。従って特に SL(2,R), SO(3) 上にはこのような概平坦擬リーマン計量が存在しないことが容易に示せるようになった。この恒等式はリッチテンソルとリー環の構造定数を用いて表される不変式の間の関係式という形をしており、不変式の幾何学への有用な応用例ととらえることができる。今後の課題として、この恒等式の高次元化が望まれるところである。

(2) リー環の標準型と不変量
　３次元リー群上の左不変で平坦、あるいは概平坦な擬リーマン計量の存在・非存在をリー環の成す代数多様体の立場から把握する

ためには、リー環の変形・退化に適合したリー環の標準型を求めておく必要がある。今回、この要件を満たしてくれる標準型を求めることに成功し、例えば３次元実可解リー環は連続的に変形する一つの族として表せることがわかった。これにより、３次元可解リー環が左不変で概平坦なリーマン計量をもてば、田崎・梅原不変量の値が０以下になることを示すことができた。田崎・梅原不変量はリー環の代数的な不変量であり、それが左不変概平坦リーマン計量という幾何構造と密接につながっていることが初めて明らかにされたことになる。また、この標準型を用いて次の事実を示すことができた。「３次元実リー環が概平坦な擬リーマン計量をもてば、その退化したリー環上にも同様に概平坦な擬リーマン計量が存在する。」この事実は、更に一般次元にも拡張可能であると予想される。リー環は退化するほどに可換なものに近づくのであるから、この事実（＋予想）は平坦な幾何構造と、代数的な可換性とのつながりを暗示しているものといえる。

(3) リー群上の左不変平坦な射影構造

リー群が単純な場合には、左不変平坦な射影構造をもつものの分類は既に知られていたが、一般のリー群の場合、あるいは半単純リー群についての存在・非存在性についてはあまり多くのことは知られていなかった。半単純リー群の場合、広島大学理学研究科の大学院生加藤宏尚氏の研究に触発され、例えば sl(2,R)+sl(3,R), sl(3,R)+sl(4,R) 上に平坦な射影構造の存在すること示すことができた。一般にこのような幾何構造と、リー環のある種の表現とが対応していることが私の過去の研究でわかっているが、上記２例の場合はいずれもリー環の既約表現を用いて構成することができる。その一方、リー環 sl(2,R)+sl(2,R) 上には平坦な射影構造は存在しないことを示すこともできた。これらの結果は、新たに「半単純リー群で左不変平坦な射影構造をもつものを分類せよ」という問題を提起することともなった。この問題については、加藤宏尚氏が既約表現（で複素射影構造）の場合に完全な解答を与えるに至った。

この種の平坦幾何構造の存在・非存在を判定する具体的なアルゴリズムについては私の過去の研究で既に得られているが、現実的には与えられたリー環のすべての表現についてこの判定法を適用することは残念ながら不可能事といってよい。更に有用な判定方法が望まれるところであるが、この問題に対して次の強力な必要条件を得ることができた。「定理：ｎ次元リー群上に左不変で平坦な射影構造が存在すれば、それに対応するリー環のｎ＋１次表現の自明でないｎ＋１次不変式が必ず存在する。」この判定法により、上記 sl(2,R)+sl(2,R) などのいくつかの半単純リー環上には平坦な射影構造の存在しないことを容易に示すことができるようになった。また sl(2,R) 上には既約な４次表現に対応する平坦な射影構造が存在しているが、この幾何構造に対応する不変式は、古典的な binary cubic の４次不変式（判別式）であり、この種の幾何構造の自然さを垣間見ることができた。

(4) 幾何構造と不変式

上記の研究結果からも明らかなように、ある種の幾何構造と代数的な不変式とは根源的な場において、密接な関わりをもっていることがわかる。この視点に立って、加藤宏尚氏は平坦複素射影構造に関してこの種の幾何構造とある条件を満たす概均質ベクトルとが対応していることを示し、更に表現が既約の場合の分類結果も与えた。

この不変式と幾何構造のつながりは微分幾何学的なものに留まるものではない。その一つの具体的な例として、初等幾何学に現れる３角形の諸心（重心、外心、内心、垂心など）とある種の多項式の不変式との対応を示すことにも成功した。この立場から初等幾何学を眺めると非常に見通しがよくなり、例えば昔からよく知られていたオイラー線・ナゲル線などの直線は更に一般的なかたちのものに拡張され、また諸心の不変量としての「次数」という概念も導入することができた。

「平坦な幾何構造」と「不変量」との関連という視点から本研究を開始したのであるが、いくつかの成果をあげることができただけに留まらず、このような形で更に将来の研究の基盤となる深い視点を得ることができたことには大きな意味がある。その一方で、高次元のケースについては残念ながらほとんど手づかずの状態で研究期間を終えることになってしまった。この点に関しては、引き続き私の研究課題として考察を深め、今後も具体的な成果をあげるよう努めると同時に、より根源的な場から幾何学と不変式の理解を深めてゆきたいと考えている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 12 件）

① Y.Agaoka, Triangle centers defined by quadratic polynomials, Math. J. Okayama Univ., 査読有, 掲載決定. http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00028400

② 阿賀岡芳夫, ３次元リー群上の左不変概平坦な計量について, 名城大学幾何学研

究集会「多様体上の種々の幾何構造とその応用」アブストラクト，査読無，2010，pp.51-58.

③ Y.Agaoka, Degree of triangle centers and a generalization of the Euler line, Beitrage Algebra Geom., 査読有, Vol.51, No.1, 2010, pp.63-89. http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00025256

④ H.Konno, Elliptic quantum group U_p,q (sl_2), Hopf algebroid structure and elliptic hypergeometric series, J. Geom. Phys., 2009, Vol.59, 査読有, pp.1485-1511.

⑤ 阿賀岡芳夫，３角形の諸心とその不変量，「部分多様体論・湯沢2008」アブストラクト，査読無，2008，pp.19-24.

⑥ Y.Agaoka, E.Kaneda, Local isometric imbeddings of Riemannian symmetric spaces and their rigidity, Sugaku Expositions, 査読有, Vol.21, No.1, 2008, pp.33-54.

⑦ H.Konno, Elliptic quantum group U_p,q (sl_2) and vertex operators, J. Phys. A Math. Theoret., 査読有, 2008, Vol.41, 194012, pp.1-12.

⑧ H.Tamaru, H.Yoshida, Lie groups locally isomorphic to generalized Heisenberg groups, 査読有, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.136, No.9, 2008, pp.3247-3254.

⑨ H.Tamaru, Noncompact homogeneous Einstein manifolds attached to graded Lie algebras, 査読有, Math. Z. Vol.259, No.1, 2008, pp.171-186.

⑩ Y.Agaoka, E.Kaneda, Rigidity of the canonical isometric imbedding of the Hermitian symmetric space Sp(n)/U(n), Hokkaido Math. J., 査読有, vol.36, No.3, 2007, pp.615-640.

⑪ 阿賀岡芳夫，兼田英二，等長埋め込みの剛性について，「Symplectic Geometry とその周辺」講演予稿集，査読無，2007，pp.76-82.

⑫ H.Tamaru, J.Berndt, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one, 査読有, Trans. Amer. Math. Vol.359, No.7, 2007, pp.3425-3438.

〔学会発表〕（計13件）

① 阿賀岡芳夫，加藤宏尚，リー群上の左不変平坦な射影構造と不変式，日本数学会，２０１０年３月２６日，慶応義塾大学.

② 阿賀岡芳夫，３角形の心のある標準的な集合について，日本数学会，２０１０年３月２６日，慶応義塾大学.

③ 阿賀岡芳夫，３次元リー群上の左不変概平坦な計量について，多様体上の種々の幾何構造とその応用，２０１０年３月１１日，名城大学.

④ 阿賀岡芳夫，２次式で定まる３角形の心と主直線，研究会「直観幾何学」，２０１０年２月１３日，熊本大学.

⑤ 阿賀岡芳夫，２次式で定まる３角形の心と，central lines，日本数学会，２００９年９月２５日，大阪大学.

⑥ 阿賀岡芳夫，オイラー線上の心を，不変量で特徴付ける，日本数学会，２００９年３月２８日，東京大学.

⑦ 阿賀岡芳夫，オイラー線の一般化と，３角形の心の次数，「熊本幾何セミナー」，２００８年１２月１２日，熊本大学.

⑧ 阿賀岡芳夫，３角形の諸心とその不変量，部分多様体論湯沢・２００８，２００８年１１月２８日，湯沢グランドホテル.

⑨ 阿賀岡芳夫，オイラー線の一般化と，３角形の心の次数，日本数学会，２００８年９月２６日，東京工業大学.

⑩ 阿賀岡芳夫，リー群上の左不変平坦な幾何構造，幾何学阿蘇研究集会，２００８年９月３日，休暇村南阿蘇.

⑪ 阿賀岡芳夫，３角形の「心」の次数，オイラー線の拡張，森本徹先生御退官記念研究集会，２００８年３月１８日，奈良女子大学.

⑫ 阿賀岡芳夫，対称空間の局所等長埋め込み，曲率不変量，剛性，岡山幾何学談話会，２００７年１１月３０日，岡山理科大学.

⑬ 阿賀岡芳夫，兼田英二，等長埋め込みの剛性について，Symplectic Geometry とその周辺，２００７年１１月１４日，岐阜経済大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

阿賀岡　芳夫（AGAOKA YOSHIO）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：５０１９２８９４

(2)研究分担者

田丸　博士（TAMARU HIROSHI）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：５０３０６９８２

(3)連携研究者

宇佐美　広介（USAMI HIROYUKI）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：９０１９２５０９
(H19：研究分担者)

中山　裕道 (NAKAYAMA HIROMICHI)
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：３０２２７９７０
(H19：研究分担者)

今野　均 (KONNO HITOSHI)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：００２９１４７７
(H19：研究分担者)

兼田　英二 (KANEDA EIJI)
大阪大学・大学教育実践センター・教授
研究者番号：９０１１６１３７
(H19：研究分担者)