

平成21年 4月14日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540096

研究課題名 (和文) 共形幾何学の幾何学的結び目理論への応用

研究課題名 (英文) Conformal geometry and its application to geometric knot theory

研究代表者

今井 淳 (IMAI JUN)

首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻 准教授

研究者番号：70221132

研究成果の概要：

幾何学的結び目理論を共形幾何学的な観点から研究するために必要な共形幾何学の基礎付けを行った。成果の一例として、曲線の共形的弧長は、その曲線の接触円全体のなす集合の  $1/2$  次元的弧長と等しいことを示した。

交付額

(金額単位：円)

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2007年度 | 700,000   | 210,000 | 910,000   |
| 2008年度 | 600,000   | 180,000 | 780,000   |
| 年度     |           |         |           |
| 年度     |           |         |           |
| 年度     |           |         |           |
| 総計     | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：共形幾何学、結び目、エネルギー

## 1. 研究開始当初の背景

「幾何学的結び目理論」とは、個々の結び目の複雑さを、円周から3次元空間への埋め込み写像としての幾何学的な複雑さとして、研究する分野である。研究代表者の結び目のエネルギーの研究がその発端となった。

日本ではまだあまり馴染みがないが、本 (A. Stasiak, V. Katritch, and L. H. Kauffman eds., *Ideal knots*, Series on Knots and Everything Vol.19, World Scientific, Singapore 1998.) がでたり、AMS の集会のスペシャル・セッションになったり (Special Session on Physical Knotting and Unknotting, 2001 Spring Western Section

Meeting, Las Vegas, NV, April 21-22, 2001 および Special Session on Numerical Methods, Calculations and Simulations in Knot Theory and Its Applications, 2003 Spring Western Section Meeting, San Francisco, CA, May 3-4, 2003) するなど、この10年以上活発に研究されてきた分野である。

実際の物質や分子構造の研究に応用できるため、研究集会では、いわゆる純粋数学の研究者のみでなく、計算機数学、物理学、高分子化学、生物数学、DNAの研究者も参加するのが常である。(このため、「物理的結び目理論」と呼ばれたこともあった。)

通常の結び目理論では、結び目不変量、すなわち、結び目の同値類のなす空間の上の関数を用いることが主であるのに対し、幾何学的結び目理論では、同値関係で割る前の空間、すなわち、埋め込み写像全体のなす空間の上の汎関数を用いる。

当研究では、このような汎関数として、特に共形不変なもの、すなわち、メビウス変換で不変になるようなものを考える。

そのために必要な共形幾何学の基礎付けを行い、そこから派生する問題を、幾何学的結び目理論と直接結びつかないものも含めて研究する。

共形幾何学的な側面は、フランス、ブルゴーニュ大学のランジュヴァン教授との共同研究である。

当研究の元々の動機は、津田塾大学の福原先生 (S. Fukuhara, *Energy of a knot*, A Fete of Topology. Y. Matsumoto, T. Mizutani, and S. Morita, eds, Academic Press (1988), 443--452) と大阪大学の作間先生 (M. Sakuma, Problem no. 8 (in Japanese), The collection of problems on "Low dimensional topology and related matters", in Japanese, edited by S. Kojima and S. Negami (1987), 7.) により独立に提起された次の問題である：

問題：結び目の空間上に適当な「エネルギー」を定義し、各々の結び目型の中で、その「エネルギー」を最小にするもの（以下、エネルギー最小元と言うことにする）として、その結び目型の「最良な形」を定義することができるか？

この問題の解決のために、代表者は結び目のエネルギーを定義した (J. O'Hara, *Energy of a knot*, Topology **30** (1991), 241--247)。これが幾何学的結び目理論の発端であると言える。その後、フィールズ賞受賞者のアメリカのフリードマン氏とその弟子達のグループが、代表者の定義した結び目のエネルギーが共形不変であることを示し、それにより、上の問題の部分的な、すなわち素な結び目型の場合の解決を与えた。

一方、ランジュヴァン氏はウィルモア予想への挑戦のなかで、共形幾何学的な積分幾何を用い、結び目の新しい汎関数を定義した。これと代表者が定義したエネルギーとの関

連を調べるため、1999年からランジュヴァン氏と共同研究を始めた。

共同研究の成果の一部は海外共同研究者のランジュヴァン教授との共著論文 (R. Langevin and J. O'Hara, *Conformally invariant energies of knots*, J. Inst. Math. Jussieu **4** (2005), 219--280) にまとめている。また、結び目のエネルギーと共形幾何学、およびその周辺分野について、代表者が本 (J. O'Hara, *Energy of knots and conformal geometry*, Series on Knots and Everything Vol. 33, World Scientific, Singapore, 304 pages, (2003)) にまとめている。

## 2. 研究の目的

共形幾何学的な観点から幾何学的結び目理論、曲線論、および曲面論を研究すること。

そのために必要な共形幾何学の基礎付けを行い、そこから派生する問題を、幾何学的結び目理論と直接結びつかないものも含めて研究すること。

## 3. 研究の方法

幾何学的な複雑さは、埋め込み写像全体のなす空間の上のエネルギー汎関数を用いて測る。本研究では、このような汎関数として、特に共形不変なもの、すなわち、メビウス変換で不変になるようなものを用いる。

研究対象の幾何学的な枠組みは、ローレンツ計量の入った、5次元ミンコフスキー空間と、この計量を保つ、全斉次ローレンツ群の組である。3次元球面は、光錐の上半分の無限遠点の集合としてとらえる。

結び目  $K$  に 2 点  $x, y$  で接する球面を複素球面と考え、結び目上の 4 点  $x, x+dx, y, y+dy$  の非調和比を考えることにより、結び目の 2 点配置空間上の複素数値 2 次微分形式が得られる。これを結び目の無限小非調和比と呼ぶ。無限小非調和比の偏角の絶対値は、Doyle と Schramm が与えた共形角になる。

結び目の空間の上に、共形不変なエネルギーを定義するとき、重要な役割を果たすものが 2 つある。

結び目の無限小非調和比、および、 $n$  次元球面の中の向き付けられた  $q$  次元球面全体のなす集合  $S(q, n)$  の持つ擬リーマン構造である。

通常のリーマン計量での微分幾何学や積分幾何学を、上の擬リーマン構造の設定で構築し、それを用いたい。そして、得られたエネルギーを無限小非調和

比を用いて表すことが可能な場合は、それによって、今までに得られている汎関数との関係を調べたい。

#### 4. 研究成果

(1) まず擬リーマン多様体の中の零的曲線の「1/2-次元弧長要素」を定義し、以下の応用を与えた。

C を 3次元空間 (ユークリッド空間または球面) の曲線とし、 $\Gamma$  を C の接触円全体の集合とする。このとき、

(a)  $\Gamma$  は  $S(1, 3)$  つまり 3次元ユークリッド空間または 3次元球面の中の向きのついた円周全体のなす空間 (これは擬リーマン構造を持つ) の零的曲線となる。

(b)  $S(1, 3)$  の零的曲線が、3次元ユークリッド空間または 3次元球面のある曲線の接触円全体の集合となるための必要十分条件を与えた。

(c) C の頂点は  $\Gamma$  の 1/2-次元弧長要素が消える点に対応する。

(d) 3次元ユークリッド空間の曲線はメビウス変換を除いて、共形的弧長、共形的曲率、及び共形的曲率の 3 つで決まることが Fialkow により示されている (1942)。

C の共形的弧長は  $\Gamma$  の  $\frac{1}{2}$ -次元弧長要素の引き戻しのある定数倍と等しい。

以上の結果は、Commentarii mathematici Helvetici という査読有りの雑誌に掲載予定である (下の雑誌論文の文献の①)。

(2) 3次元ユークリッド空間または 3次元球面の中の向き付けられた  $q$  次元球面 ( $0 \leq q < n$ ) の集合を  $S(q, n)$  と書くと、これは  $(n+2)$  次元ミンコフスキー空間の中の、光錐と横断的に交わるような (すなわち時間的な)  $q+2$  次元線形部分空間のなすグラスマン多様体

$S_0(n+1, 1)/S_0(n-q) \times S_0(q+1, 1)$  と一致する。 $S(q, n)$  は、指数  $n-q$  を持つ  $(q+2)(n-q)$  次元擬リーマン多様体になる (すなわち、各点での接空間は指数  $n-q$  の非退化不定値二次形式を持つ) ことを、Plucker 座標を用いて示し、その擬正規直交基底の例を pencil を用いて具体的に与えた。

また、無限小非調和比の実部について、以下のような意味づけを得た。

$\gamma, \phi$  を曲線とし、点  $x, y$  をそれぞれ  $\gamma, \phi$  の点とする ( $\gamma$  と  $\phi$  が等しい場合は、点  $x, y$  は相異なるものとする)。 $\gamma$  と  $\phi$  の積空間は  $S(0, 3)$  の曲面となる。この曲面の  $S(0, 3)$  の

擬リーマン構造に付随する符号付き面積要素は、無限小非調和比の実部の  $2\sqrt{-1}$  倍と等しい。従って完全形式になる。

虚部については局所的にのみ意味づけすることができる。3次元球面を 4次元双曲空間の境界とみなす。 $l(x, y)$  を  $x \in \gamma$  と  $y \in \phi$  を 4次元双曲空間の中で結ぶ測地線とする。

$l$  を  $l(\xi, \eta)$  と直交する 4次元双曲空間の全測地的 3-平面とする。 $(x, y)$  を  $(\xi, \eta)$  の近傍  $N$  の点とする。 $l(x, y)$  と  $l$  の交わりを  $S(x, y)$  とすると、 $S = \{S(x, y) \mid (x, y) \in N\}$  は  $l$  の曲面になる。このとき、 $S$  の  $S(\xi, \eta)$  における面積要素は、無限小非調和比の虚部の 4 倍に等しい ( $l$  の選び方によらない)。

(下の雑誌論文の文献の③)

(3) 結び目全体の空間の有限次元版として、折れ線結び目のなす空間や、それと関連して、ある種の平面リンクの配置空間にも興味を持っている。

胴体から  $n$  本の脚が出ていて、各々の脚は長さが 2 で真ん中に関節があり、そこで任意の角度で曲がることのできるようなスパイダー型平面ロボットを考える。

脚の端点は半径  $R$  ( $0 \leq R \leq 2$ ) の円周上等間隔に並んだ  $n$  点に固定されていて、胴体、関節、脚のすべては同一平面内を動き、自己交叉を認めるものとする。

このとき、このスパイダー型ロボットのとりうる形の集合の位相型 (一般には向き付け可能な閉曲面になる) を、トポロジカルな方法、及び、閉曲面になる場合には更にモース理論を用いた方法で決定した。

(下の雑誌論文の文献の⑤)

(4) 2成分絡み目の幾何学的な複雑さを測る量を積分幾何学的に定義した。これは、自明な絡み目ではなく、ホップ絡み目 (の形のよいもの) で最小値を取る、という点でユニークなものである。

(5) 4点の共形的双対を定義し、それがその 4点を理想頂点とする 3次元双曲空間内の理想四面体の重心に関する対蹠点写像で与えられることを示した (下の雑誌論文の文献の②)。

(6) 3次元空間内の等辺等角多角形の配置空間で辺の数が 6 以下のものを考察した。これは 1970 年代に化学者が一部計算機を援用して考察していた結果を、拡張、一部訂正し、理論的な根拠を与えたものである。

(7) 結び目の writhe の共形不変性の別証明を与えた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

英語の論文では、旧姓の O' Hara (大原) を使用。

- ① Remi Langevin and Jun O' Hara, Conformal arc-length as 1/2 dimensional length of the set of osculating circles, to appear in Comm. Math. Helv. 査読有
- ② J. O' Hara, Conformal dual of a quadruplet of points, Far East Journal of Mathematical Education 2 (2008) 1-11. 査読有
- ③ J. O' Hara, Energy of knots and the infinitesimal cross ratio, Proceedings of the Conference "Groups, Homotopy and Configuration Spaces", Geometry and Topology Monographs 13 (2008) 421-445. 査読有
- ④ J. O' Hara, A Note on Y-energies of Knots, OCAMI Studies Vol 1 (1). Knot Theory for Scientific Objects, proceedings of the International Workshop on Knot Theory for Scientific Objects (2007) 85-95. 査読有
- ⑤ J. O' Hara, The configuration space of planar spidery linkages, Topology Appl. 154 (2007), 502-526. 査読有
- ⑥ J. O' Hara, The configuration space of a spider, Proceedings of the international conference, "Intelligence of Low Dimensional Topology 2006" published by World Scientific Publishing Co. in the Knots and Everything Book Series Vol. 40 (2007) 245-252. 査読有

[学会発表] (計 14 件)

- ① 今井 淳,  $S^2 = \partial H^3$  の 4 点の  $H^3$  内の共形的中心、日本数学会年会、2009 年 3 月 28 日、東京大学
- ② 今井 淳, 光的(零的)曲線の 1/2 次元の長さについて、日本数学会年会、2009 年 3 月 28 日、東京大学
- ③ 今井 淳, 等辺等角多角形の配置空間、日本数学会年会、2009 年 3 月 26 日、東京大学
- ④ J. O' Hara, Configuration space of small equilateral and equiangular polygons, Knots and soft-matter physics, Topology of polymers and related topics in physics, mathematics and biology, 2008 年 8 月 29 日、京都大

学 基礎物理学研究所

- ⑤ 今井 淳, Conformal Geometry of curves, 第 5 回幾何学シンポジウム、2008 年 8 月 23 日、弘前大学
- ⑥ 今井 淳, 4 点の共形的双対、日本数学会年会、2008 年 3 月 25 日、近畿大
- ⑦ 今井 淳, 共形積分幾何学の話、日本数学会年会、2008 年 3 月 25 日、近畿大
- ⑧ 今井 淳, Writhe の共形不変性、日本数学会年会、2008 年 3 月 23 日、近畿大
- ⑨ J. O' Hara, The conformal arc-length via osculating circles, A. G. T. セミナー、2008 年 1 月 17 日、ブルゴーニュ大学ブルゴーニュ数学研究所 (フランス)
- ⑩ 今井 淳, 部分球面のなす空間とその応用、トポロジー火曜セミナー、2007 年 10 月 23 日、東京大学
- ⑪ 今井 淳, Indefinite Grassmannian manifolds and their applications, 微分幾何学セミナー、2007 年 10 月 19 日、首都大学東京
- ⑫ 今井 淳, 曲線の接触円と共形的弧長、秋季総合分科会、2007 年 9 月 23 日、東北大学
- ⑬ 今井 淳, 結び目を通る円の集合の体積、秋季総合分科会、2007 年 9 月 21 日、東北大学
- ⑭ 今井 淳, 2 成分絡み目の積トーラスの面積、秋季総合分科会、2007 年 9 月 21 日、東北大学

[その他]

ホームページ

<http://www.comp.tmu.ac.jp/knotNRG/indices/indexj.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

今井 淳

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：70221132

### (2) 研究分担者

神島 芳宣

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10125304

Martin Guest

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10295470

横田 佳之

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：40240197

赤穂 まなぶ  
首都大学東京・大学院理工学研究科・助教  
研究者番号：30332935

(3) 連携研究者

(4) (海外) 研究協力者  
Remi Langevin  
ブルゴーニュ大学・ブルゴーニュ数学研究  
所・教授