

平成 22 年 5 月 1 日現在

研究種目： 基盤研究(C)
 研究期間： 2007 ～ 2009
 課題番号： 19540099
 研究課題名（和文） 捩れた群作用に関する同変指数定理と非可換幾何学
 研究課題名（英文） Noncommutative Geometry and equivariant index theorem for twisted group actions

研究代表者
 森吉 仁志 (MORIYOSHI HITOSHI)
 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
 研究者番号：00239708

研究成果の概要（和文）：非可換幾何の枠組の下に、葉層構造が関与する指数定理と境界付多様体上での指数定理の一般化を行った。とくに「捩れK理論」や「コサイクルで捩ったC*群環」をとりあげ、この概念が関与する指数定理の導出を探った。とくに「K-aspherical」という条件の下で捩ったC*群環のK群に値をとる指数定理を確立し、複素多様体の算術種数に関するいくつかの不等式評価を導いた。また Atiyah-Patodi-Singer 指数定理を非可換幾何の枠組で定式化し、無限次被覆空間や境界付多様体上の葉層構造に対する拡張を行った。これよりエータ不変量のみならず高次エータ不変量も相対巡回コホモロジーと相対K群のペアリングとして解釈することが可能となり、エータ不変量の幾何学的意義がより明確になった。

研究成果の概要（英文）：The objective in this project of research is a generalization of the Atiyah-Singer Index Theorem from the viewpoint of Noncommutative Geometry, in situations such as foliated manifolds and manifolds with boundary. We focused on two notions, the twisted K-theory and the group C*-algebras twisted by cocycles, and sought for Atiyah-Singer type index theorems related to them. We first established a Atiyah-Singer type index theorem for a twisted group C*-algebras of the fundamental group on K-aspherical kaehler manifolds, and obtained certain inequalities on the arithmetic genera of complex manifolds, which is related to the vanishing theorem due to Green and Lazarsfeld. Second we formulated the Atiyah-Patodi-Singer index theorem in the framework of Noncommutative Geometry and extended the theorem in the cases of covering space with infinite degree and foliated manifold with boundary. This formulation provide us with an interpretation of the eta invariant including the higher one, as a pairing of relative cyclic cohomology and relative K-theory, which makes even clearer the geometric significance of eta invariants.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：非可換幾何学、指数定理、K理論、エータ不変量、葉層構造、巡回コホモロジー

1. 研究開始当初の背景

非可換幾何学とは、1980年代後半に A. Connes により提唱された幾何学の新しい枠組である。この枠組は微分幾何学・位相幾何学・作用素環論・エルゴード理論・大域解析学にまたがる広い分野に大きな刺激を与えており、さらに素粒子論においてもその応用が活発に研究されている。この非可換幾何学の中核を占める研究対象の一つに Atiyah-Singer 指数定理がある。この定理は、多様体の幾何不変量と解析不変量の深い関連性を導く美しい定理であり、さらに性質の全く異なる二つの不変量を結びつけている点で著しく有用性が高い。そして Connes は K理論・巡回コホモロジー群などの新手法を非可換幾何学に導入して、葉層多様体など従来の幾何手法では扱い難かった対象へ指数定理を拡張した。しかし研究開始当初時は、この方向への研究の大半は一般論に留っており、幾何学が扱う多様な対象に即した詳細な研究は国内外においても数少ない状況であった。非可換幾何学に関して、幾何学から素粒子論にわたる分野に革新的展開をもたらす潜在能力に疑問の余地はないものの、その将来性と実効性を確かめるためには、具体例に即した精緻な検証が不可欠と考えられた。

2. 研究の目的

非可換幾何の枠組の下に、捩れ K理論やコサイクルで捩った C^* 群環をとりあげ、この概念が関与する指数定理の導出を探る。捩れ K理論やコサイクルで捩った C^* 群環などは、基本群の大きい多様体に対して興味深い振舞いをするので、このような多様体に上記の指数定理を具体的に検証することが目標のひとつとなる。さらに境界付多様体上の葉層構造に関する指数定理へ指数定理を一般化すること、同時に対応するエータ不変量の概念を非可換幾何の立場で明確化することも目的のひとつである。

3. 研究の方法

まず、研究の予備段階として本研究目的の周辺分野における基礎知識の充足を図った。そのため関連する主題の研究集会へ積極的に

参加して専門家と討論を行った。また専門家と個別に研究連絡も行った。このために国内旅費・外国旅費・謝金等の経費を使用した。さらに葉層多様体上の指数定理や解析的二次不変量に関わる指数定理の拡張について、専門家を交えた密接な研究連絡を行った。また必要となる文献を整備し、指数的理の研究に資する環境を整備した。資料整理にはノートパソコンとその関連機器を拡張した。

4. 研究成果

(1) コンパクト複素多様体において、Gromov により導入された「ケーラー双曲的」という概念がある。この概念を緩めた「K-aspherical」という条件の下では、ケーラー型を普遍被覆空間上に引き戻すと完全型式であり、従って対応する基本群の 2-コサイクルで捩った C^* 群環を考えることができる。この C^* 群環の K群に値をとる指数定理を確立し、代数幾何における Green-Lazarsfeld の消滅定理に関連して、複素多様体の算術種数に関するいくつかの不等式評価を導いた。

(2) Atiyah-Patodi-Singer 指数定理を非可換幾何の枠組で定式化し、無限次被覆空間や境界付多様体上の葉層構造に対する拡張を行った。さらにこの定理を高次元の葉を持つ葉層多様体に拡張した (P. Piazza との共同研究)。これよりエータ不変量のみならず高次エータ不変量も相対巡回コホモロジーと相対 K群のペアリングとして解釈することが可能となり、エータ不変量の幾何学的意義がより明確になった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① H. Moriyoshi, The Chern-Weil theory on classifying spaces, *Geometry and Something*, Fukuoka (2010) 29-31 査読無
- ② H. Moriyoshi, Kahler hyperbolicity and Twisted Index Theorem, *Geometry and Something*, Fukuoka (2007) 1-7 査読無
- ③ Y. Maeda et al, Orderings and non-formal deformation quantization, *Lett.*

Math. Phys., 82, 2007, 153-175 査読有

[学会発表] (計12件)

①森吉 仁志

Godbillon-Vey 類に付随する eta 不変量
大垣研究集会 2009 「シンプレクティック
幾何学とその周辺」、岐阜経済大学, 2009 年
11 月 24 日

②森吉 仁志

The Chern-Weil theory on classifying
spaces, Geometry and Something, 福岡大学,
2009 年 11 月 21 日

③森吉 仁志

Jet homomorphisms and secondary
characteristic classes, 「微分・代数ト
ポロジーの現在と未来」、徳島, 2009 年 11 月
12 日

④森吉 仁志

The Godbillon-Vey cocycle associated to
jet homomorphisms `Foliations and Groups
of Diffeomorphisms' 東京大学玉原セミナー
ハウス, 2009 年 10 月 30 日

⑤森吉 仁志

Twisted Riemann-Roch theorem on
K-aspherical manifold, The godbillon-Vey
eta cocycle on foliated manifolds with
boundary, 2009 NIMS International
Workshop on ``Differential Geometry and
repeated topics'', Jeju, August 13 and 14,
2009.

⑥森吉 仁志

The Atiyah-Patode-Singer index theorem in
Noncommutative Geometry,
International Workshop on Noncommutative
Geometry and Physics, 2009 February 21,
2009, Keio University, Yokohama

⑦森吉 仁志

The Atiyah-Patodi-Singer index theorem in
relative cyclic cohomology,
The 4th Geometry Conference for the
Friendship of China and Japan,
Tianjin, China, December 25, 2008,

⑧森吉 仁志

Twisted Index Theorem for type III
factors, Analysis and Topology in
Interaction, Conference in Cortona, Italy,
June 18, 2008

⑨森吉 仁志

Twisted Index Theorem and type III factors,
作用素論・作用素環論研究集会, 千葉大学,
千葉, 2007 年 11 月 8 日

⑩森吉 仁志

Twisted Index Theorem and Its Geometric
Applications, International Workshop 2007
The 21st Century COE Program
"Towards a New Basic Science: Depth and
Synthesis", Osaka University, Osaka,

2007 年 9 月 11 日

⑪森吉 仁志

Twisted Index Theorem and type III factors,
International School and Conference of
Noncommutative Geometry, Chern Institute
of Mathematics, Nankai University,
Tianjin, 2007 年 8 月 26 日

⑫森吉 仁志

Twisted Index Theorem and its geometric
applications, "Spectral Analysis in
Geometry and Number Theory", 名古屋大学,
名古屋, 2007 年 8 月 6 日

[図書] (計1件)

① H. Moriyoshi T. Natsume, Operator
Algebras and Geometry, Translations of
Mathematical Monographs vol. 237 (2008),
A.M.S. 1-155.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森吉 仁志 (MORIYOSHI HITOSHI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
研究者番号: 00239708

(2) 研究分担者

前田 吉昭 (MAEDA YOSHIAKI)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 40101076
(H20→H21: 連携研究者)
亀谷 幸生 (KAMETANI YUKIO)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号: 70253581
(H20→H21: 連携研究者)
宮崎 琢也 (MIYAZAKI TAKUYA)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号: 10301409
(H20→H21: 連携研究者)
戸瀬 信之 (TOSE NOBUYUKI)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号: 00183492
(H21: 連携研究者)
宮崎 直哉 (MIYAZAKI NAOYA)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号: 50315826
(H21: 連携研究者)
加藤 毅 (KATO TSUYOSHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 40101076
(H20→H21: 連携研究者)
夏目 利一 (NATSUME TOSHIKAZU)
名古屋工業大学・工学系研究科・教授
研究者番号: 00125890
(H20→H21: 連携研究者)

三松 佳彦 (MITSUMATSU YOSHIHIKO)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：70190725
(H20→H21：連携研究者)
小野 薫 (ONO KAORU)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20204232
(H20→H21：連携研究者)
綿村 哲 (WATAMUAR SATOSHI)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00201252
(H20→H21：連携研究者)
勝良 健史 (KATSURA TAKESHI)
慶応義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：50513298
(H21：連携研究者)

(3) 連携研究者
()

研究者番号：