様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22 年　5 月　31 日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007　～2009
課題番号：19540100
研究課題名（和文）正則写像の拡張性と複素多様体の構造

研究課題名（英文）　Extension property of holomorphic maps and the structure of complex manifolds

研究代表者
加藤　昌英（KATO MASAHIDE）
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：90062679

研究成果の概要（和文）： Hartogs 領域から複素多様体への沢山の正則写像について、それらの正則拡張性の程度を測定することによって、与えられた複素多様体の構造を調べる方法を考えている。応用として次の結果を得た。有限生成複素 3 次元離散射影変換群がある種の不連続性をもつとき、その群に対して複素 3 次元射影空間の部分集合の非特異な商空間が標準的に定義されるが、この商空間がコンパクトで代数次元が正の連結成分を含めば、商空間は連結で 3 種類の既知の複素多様体に限ることを示した。

研究成果の概要（英文）：We are studying a method to get some information of the structure of a given complex manifold by measuring the extendibility of holomorphic maps of Hartogs domains to the given manifold. As an application of the method, we have obtained the following result. For a finitely generated three dimensional discrete projective transformation group Γ with some discontinuity condition, we can define canonically a non-singular quotient space X(Γ) of an open subset of a projective 3-space. We have shown that, if X(Γ) contains a compact connected component with positive algebraic dimension, then X(Γ) is connected, and that X(Γ) is biholomorphic to one of the three kinds of well-known 3-folds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	600,000	180,000	780,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：複素多様体論
科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学、複素多様体、正則写像の拡張、non-Kaehler, Klein 群

１．研究開始当初の背景

P. A. Griffiths が 1971 年に Two theorems on extensions of holomorphic mapping, Invent. Math., 14 (1971) 27-62 を著したのはコンパクト複素多様体の普遍被覆空間の関数論的な性質を調べたいという動機が源であった。この論文の中で彼は、多変数関数論における Hartogs の定理が、定義域を Hartogs 領域とし値域(ターゲット)を一般のコンパクト複素多様体とする正則写像に対しては、成立しないことを Hopf 多様体を例に挙げて指摘した。彼は同時に有理型写像の Hartogs 型の有理型拡張問題（開集合を含む部分まで写像を有理型に拡張する問題）を考え、肯定的であるための十分条件を、ターゲットの多様体の正則断面曲率の条件によって記述した。のちにターゲットが Kaehler 多様体の場合は、Thullen 型の拡張問題（解析的集合を跨いで写像を有理型に拡張する問題）については、1975 年に Y.-T.Siu が Extension of meromorphic maps into Kaehler manifolds, Ann.Math. 102(1975) 421-462.において最終的に肯定的に解決した。Hartogs 型の拡張問題は 1992 年に S. M. Ivashkovich が The Hartogs-type extension theorem for meromorphic maps into compact Kaehler manifolds, Inventiones Mathematicae, 109(1992), 47-54.において肯定的に解決をした。

従って、現在では正則写像の有理型写像への拡張問題はターゲットがKaehlerの場合にはすべて肯定的に解決されている。ターゲットがKaehlerでない場合はこのような拡張定理の成立は到底望めない。逆に、数々の面白い反例が見つかる。以後、正則写像を正則写像に拡張するか有理型写像に拡張するかは区別せず、有理型写像は定義域を狭めて正則写像として考察することにする。

例えば我々は Hartogs 領域の内側の境界が正則写像の自然境界になる例を 1983 年(preprint)に構成していた(Kato, Masahide：Examples on an extension problem of holomorphic maps and a holomorphic 1-dimensional foliation, Tokyo J. Math. 13 (1990), 139-146)。更に、Hartogs 領域の正則包である多重円板の中のフラクタル集合が正則写像の真性特異点集合になる例も構成して、その Hausdorff 次元を計算した（Okada, Noboru：An example of holomorphic maps which cannot be extended meromorphically across a closed fractal subset, 代数幾何小研究集会、埼玉大学 2000)。我々は、正則写像の拡張問題はターゲットを non-Kaehler にしてこそ面白い問題になると思う。Okada のような例の存在については、Ivashkovich ものちに気がついて、彼の論文(Extension properties of meromorphic mappings with values in non-Kaehler complex manifolds, Ann. of Math., 160(2004), 795-837)で述べている。この論文の中で Ivashkovich はターゲットが Kaehler より条件を緩めても pluri-Kaehler metric を持てば、正則写像の最大拡張領域が定義域の正則包に含まれる（後に述べる probable という性質を持つ）ことを示した。しかし non-Kaehler であって Ivashkovich のいう pluri-Kaehler metric を持つ多様体は、残念ながらまだ複素曲面および複素曲面の変形族のなすファイバー空間の中でしか見つかっていない。

上述のような Hartogs 型拡張定理が成り立たない多くの例と、正則拡張性はターゲットの多様体の性質を現すことを改めて示唆した M. Krachni の論文(Prolongement d'applications holomorphes, Bull. Soc. math. France, 118(1990), 229-240) にヒントを得て、我々はむしろ正則写像が正則に拡張できない部分(写像の特異点集合）をもっと積極的に扱うべきであると考えた。そこで一般の(コンパクトとは限らない)複素多様体に対して、次のような正則拡張性指数を定義した（Kato, Masahide；Okada, Noboru：On holomorphic maps into compact non-Kaehler manifolds, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 54 (2004), 1827-1854)。
n 次元複素ベクトル空間 C^n $(n>1)$ の Hartogs 領域 H から複素多様体 X への正則写像 $\sigma: H \rightarrow X$ を考え、H の正則包である n 次元多重円板 Δ 上の σ の最大正則拡張領域 Ω を考える。Ω が Δ の部分領域になるとき σ を probe と呼ぶ。与えられた X に対して任意の σ が probe になるとき、X は (n-)probable であると言う。次にコンパクト複素多様体に対し、種々の probe σ を考え $A_\sigma = \Delta - \Omega$ の実 Hausdorff 余次元を考えて、その上限をもって、X の n 次正則拡張性指数と定義する。

Ivashkovich の定理によって、コンパクト Kaehler 多様体は probable である。多くのコンパクト non-Kaehler 多様体も probable

であるが少数の non-probable な例もある（上述 Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 54 (2004))。しかも non-Kaehler のときは、σが probe であってもσの特異点集合 A_σ が非常に複雑になる可能性がある。すなわち A_σが、(A)内点を含む場合(Tokyo J. Math. 13 (1990))、(B)複素解析的集合の場合(よく知られている)、(C)フラクタル集合になる場合(上述 Okada, 2000)、などが実際に起こる。どの現象が生ずるのかは、ターゲットの多様体の複素解析的な構造を反映して決まる。正則拡張性指数のいくつかの一般的な性質については、上記の論文(Kato - Okada：Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 54 (2004)) の中で述べてある。

２．研究の目的

(1) コンパクト複素多様体はどのような条件の下に probable になるかを知ること。これは正則写像の解析接続をしたとき、拡張された写像が「多様体への写像として多価写像になるかどうか」という問題である。複素２次元の場合の「filling in the holes」に対する反例との関連も興味がある。

(2) probable なコンパクト複素多様体について、正則拡張性指数自身の満たす性質、および正則拡張性指数と複素多様体の構造の関係を調べ、それを具体的に応用してみること。

(3) 正則拡張性指数の応用として複素 1 次元の Klein 群理論を複素解析的に高次元化すること。当面、複素３次元の場合に考察する。Klein 群理論は実双曲幾何学の理論として高次元化されたが、我々は将来これを複素解析的に高次元化したい。我々の正則拡張性指数と高次元の Klein 群となるべき群の極限集合の測度との間には密接な関係がある。我々の指数はここに表れる多様体を統一的に議論するときに役に立つと思っている。

３．研究の方法

総てのエフォートの８割程度は「２.研究の目的」の (2)および(3) に注いだ。(2)で言う「具体的な応用」というのは、この３年間では結局、(3)の Klein 群理論の高次元化のみになってしまっている。

研究の前半の基本方針は、古典的な複素１次元 Klein 群理論の見直しであった。特に B.Maskit の教科書（Kleinian Groups, GMW287, Springer 1988）の基礎部分を参考にして、基礎部分の高次元化を行った。この部分のアイディアは既に暖めていたので、他大学での集中講義の機会を利用してまとめた（ただしまだ精密化の必要な部分が残っている）。続いて、コンパクト曲面をファイバーとするファイバー空間に対して正則写像の拡張性指数をどのように適用するかという問題に取り掛かった。この部分の研究には種々の試行錯誤が必要で、多くの研究者からヒントを得た。特に、2008 年 6 月フランス・マルセイユで開かれた『Geometrie des Varietes Complexes III』に招かれて出席した機会を利用して、Sergei M. Ivashkovich（仏,Univ. de Lille1）, Georges Dloussky（仏,Univ. de Provence), Karl Oejeklaus（仏, Univ. de Provence), Andrei Teleman（仏,Univ. de Provence), Joerg Winkelmann（独,Uni. Bayreuth)などと情報やアイディアの交換を行った。

４．研究成果

(1) 何故、コンパクト複素多様体が non-probable になることがあるのかという問題は非常に重要であるが、例がいくつかあるだけで研究の糸口が見つからない。研究は進まなかった。

(2) 正則拡張性指数の応用として次の定理を示した。

定理 Ωは複素３次元射影空間内の、少なくとも一本の射影直線を含む領域(=広い領域)であるとする。ΓはΩの、固有不連続で固定点を持たない正則変換群であって、商空間 X=Ω/Γはコンパクトであるとする。もし X の代数次元が正であれば、Ωは複素３次元射影空間の、互いに交わらない高々２本の直線の補集合であり、従って X は、複素３次元射影空間、Blanchard 多様体、または L-Hopf 多様体のいずれかである。

この結果は下記「5.主な発表論文等」の〔雑誌論文〕2. として出版予定である。またこの結果は、以前の論文 (Kato, Masahide: Compact quotients of large domains in a complex projective 3-space, Tokyo J. Math., 26(2006), 209-232) で述べた結果の付帯条件を取り除いたものである。

定理の証明のアウトラインは以下の通り。

Γ は自動的に３次元一般射影変換群の有限生成な離散部分群になることがわかる。
Ωが広い領域であることから、このような群Γに対しては、標準的に固有不連続集合Ω(Γ)が定義され、その補集合(極限集合と呼ぶ)は射影直線の和集合である。X=Ω/Γがコンパクトであることから、ΩはΩ(Γ)の連結

成分になることも分かる。X の代数次元が正であるという仮定から、X の正則拡張性指数が４以上であることが分かり、これからΩは複素３次元射影空間の中の稠密な開集合であることが分かる。従ってΩ(Γ)は連結で、Ω＝Ω(Γ)である。すなわちΩの補集合 Λ は(一般には実数濃度の)射影直線達の和集合である。

さて問題の多様体 X=Ω/Γが、３次元射影空間、Blanchard 多様体、Hopf 型多様体のいずれでもないとする。代数次元が２の場合は簡単にＸの非存在が分かる。代数次元が１の場合を考える。一般には目的の多様体は、曲線上のコンパクト複素曲面をファイバーとするファイバー空間に双有理になる。しかし、X 上の有理形関数を Ωに引き上げて定義される有理形関数は射影空間上の有理関数Ｆに拡張されて、その不確定点 B は Λに含まれることが分かる。ゆえに X そのものが曲線上のファイバー空間である。ΓがＦを不変にすることから、Γの有限指数の部分群が、ある射影平面Ｈを不変にすることが分かる。簡単のため Γ自身が H を不変にすると仮定する。このときコンパクト複素曲面 M=(H∩Ω)/Γがファイバーに入る場合を考察すれば良いことが分かる。M が射影構造を持っていることと曲面の分類論を用いると、一般ファイバーの候補が決まり、特異ファイバーは高々非特異曲面の重複ファイバーだけであることが分かる。ここでコンパクト複素曲面の正則拡張性指数が４以上であることを用いると、多くの場合はB=Λであり、Λは有限個の射影直線の和集合であることが分かって、これによって X の非存在が証明される。以上が証明のアウトラインである。

なお、X=Ω/Γの形に表される多様体には、多くの平坦な Twistor 空間が含まれる。代数次元が正であるような Twistor 空間については、平坦でない場合も含めて A. Fujiki (Topology of compact self-dual manifold whose twistor space has positive algebraic dimension, preprint 2000) によって完全に決定されている。Twistor 空間と我々の多様体は、一方が他方に含まれるという関係にはなっていない。

(3) Klein 群理論の複素解析的な高次元化はまだ始めたばかりである。複素１次元の場合と違って高次元においては、群作用の固有不連続性は局所的な性質ではない。従って与えられた群に対して標準的に決まる固有不連続領域をどのように定義するかが大きな問題となる。

有限生成３次元離散射影変換群Γが与えられたとき、３次元射影空間内の直線をパラメトライズする Grassmann 多様体 Q にも Γが作用する。Q に少なくとも一点 a があって、a のある近傍 W⊂Q に対して{g∈Γ: g(W)∩W ≠○}={1}であるとき、Γは L 型であるという。これが高次元の Klein 群に相当するものと考えている。L 型の有限生成３次元離散射影変換群Γに対しては３次元射影空間内に標準的に固有不連続集合Ω(Γ)を定義することが出来、Ω(Γ)/Γは（一般には連結でない）複素多様体である。

この事実は上記の論文（「5.主な発表論文等」の〔雑誌論文〕**2.**）で述べ、(2)で述べた定理の証明のなかで使った。我々の固有不連続集合は奇数次元でしか定義できないが、Kulkarni (Kulkarni, R. S. : Groups with domains of discontinuity, Math. Ann. 237(1978) 253-272)や、それを踏襲した W. Barrera (W. Barrera, A. Cano, J.-P. Navarrete : Two dimensional complex Kleinian groups with four complex lines in general position in its limit set, arXiv:001.5222v 28. Jan 2010) 等の定義よりも幾何学的に自然であると思う。

この商空間に対して Ahlfors の有限性定理に類似の事実が成立しないだろうか、という期待があったが、素朴な形では反例があることがわかった。たとえば Kapovich ; Potyagailo (Sibelian math. J. 32(1991), 227-237) による 実 Klein 群の結果を用いて平坦な Twistor 空間を作れば反例になる。

Ω(Γ)/Γの連結成分の構造を調べるためにはその因子が役に立つ。上述のように、特にΓ-不変な射影平面があれば、その商空間の構造を調べるとき非常に役に立つ。そこで一般に、有限生成複素３次元離散射影変換群Γを考える。Γ-不変な曲面があっても、Γ-不変な射影平面がない場合を調べて次の結果を得た。

定理 Γを有限生成離散複素３次元射影変換群とする。Γは複素３次元射影空間内のある曲面Ｓを不変にすると仮定する。このときもし、Γ-不変な平面が存在しなければ、S は非特異２次曲面であるか、３次捩れ空間曲線の接曲面であるか、または、非特異２次曲線上の錐である。

複素解析的連結和のテクニックを用いると、この定理の応用として、Γ-不変な曲面をまったく持たない有限生成離散複素３次元射影変換群を幾何学的に構成することが出来る、これらの結果は、「5.主な発表論文等」の〔雑誌論文〕１．として出版予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

１．Kato, Masahide：Existence of invariant planes in a complex projective 3-space under discrete projective transformation groups, To appear in Tokyo Journal of Mathematics, 査読有り

２．Kato, Masahide：Compact Quotients with Positive Algebraic Dimensions of Large Domains in a Complex Projective 3-space, To appear in the Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有り

３．Kato, Masahide ; Komada, Kazuya : On Blanchard Manifolds, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有り, 30(2007), 397-401

〔その他〕
ホームページ等
http://www.mm.sophia.ac.jp/~kato/

６．研究組織
(1)研究代表者
加藤　昌英（KATO MASAHIDE）
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：90062679

(2)研究分担者
横山　和夫（YOKOYAMA KAZUO）
上智大学・理工学部・准教授
研究者番号：10053711