

平成 22 年 5 月 28 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540101

研究課題名（和文）尖点形式の周期に対するヘッケ作用と位相不変量の研究

研究課題名（英文）Study on Hecke operators for cusp forms and topological invariants

研究代表者

福原 真二（FUKUHARA SHINJI）

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：20011687

研究成果の概要（和文）：上半平面を定義域とする一変数尖点形式は、整数論とも関連して深く研究されてきた。本研究の特徴は、尖点形式を、その周期および一般デデキント和との自然な対応に注目して調べることである。今回、楕円アポストル・デデキント和を導入しこの和が多項式相互法則をもつ一般デデキント和の一般形であることを証明することが出来た。さらに、楕円アポストル・デデキント和が結び目不変量の研究にどう活用されるかも調べた。

研究成果の概要（英文）：Cusp forms on the complex upper half plane have been studied for the connection with number theory. The feature of our research is focusing on natural correspondences between cusp forms, periods and Dedekind symbols. We have introduced the notion of elliptic Apostol-Dedekind sums and showed these sums generate Dedekind symbols with polynomial reciprocity laws. We also studied how we can apply these sums to knot theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	900,000	270,000	1,170,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何

1. 研究開始当初の背景

3次元多様体の位相不変量や結び目不変量を計算してみると、しばしばデデキント和と呼ばれる関数が登場することに気付く。そこからより一般のデデキント和を定式化することを思いつき多項式相互法則をもつ一般デデキント和が、興味深い研究対象である

ことを知った。さらに、この和は尖点形式の周期と密接に関係することが解った。結局、尖点形式、一般デデキント和、周期（＝相互法則関数）の3者が1対1に対応していることが解り、研究の出発点になった。整数論の分野では何々の相互法則と呼ばれる公式が多々あることが知られているが、これらの公

式の背後に尖点形式あるいはその一般形である保型形式が共通して存在するのではないか（このことは名古屋大学の久保田富雄名誉教授がすでにだいぶ前から、予測しておられたということを代表者は後に知った）という問題意識のもとに研究を始めた。

2. 研究の目的

尖点形式、一般デデキント和、尖点形式の周期には、ヘッケ作用素が働いている。この作用の固有関数に当たるものは特によい性質を持っている。そこでヘッケ作用を具体的に表示する方法を見つける。また、尖点形式の様々な表示法が研究されているが、一般デデキント和についても楕円関数やテータ関数を用いて明示的に表す方法を考える。その結果としてヘッケ作用を行列表示したものであるヘッケ行列をベルヌーイ数や因子関数などのよく知られた関数を用いて書き下す。系としてヘッケ作用に関する跡公式を **Eichler-Selberg** とはまったく違った形で提示する。

さらに位相不変量との関連では、まず結び目の **Vassiliev** 不変量を作り出し一般デデキント和との関連を調べる。また、不変量が局所変形でどう変わるかも調べる。その変化が相互法則の形をとるかどうかに注目している。

3. 研究の方法

我々の研究は複素解析、代数構造、幾何学的不変量などの関連した総合的なものであり、多方面の最近の結果を吸収する必要がある。とくに保形関数や整数論の知識が必要であり、この方面の内外の研究者と意見交換することが求められている。とくに、Taiwan および Canada の数学者と連絡をとりながら作業を進めているが直接会って議論することも大切であると考えている。これらの研究者とのワークショップを行う。

研究分担者の研究方法は、これまでに知られている C_n -move で不変な絡み目不変量を利用し、局所変形である C_n -move を、ある絡み目のバンド和とみなして、絡み目の変形を行う方法や、絡み目多項式から出てくる **Vassiliev** 不変量の値の C_n -move による変化を、スケイン関係式を用いて計算する方法である。研究分担者は研究集会にも積極的に参加し、旺盛に議論しかつ情報収集にも努めることになる。

また、不変量を大量に計算し、法則性を得るためにコンピュータ実験を行う。そのためのソフトウェアは数式処理パッケージを基礎にして自ら開発する必要がある。

4. 研究成果

3年間の研究を通じて、尖点形式とその周

期およびそれを仲介するものとしての一般デデキント和の関連を基本的に解明できたと考えている。さらに、これら3者へのヘッケ作用素についても、定式化は出来たのでその性質をさらに追求していくつもりである。さらに一般デデキント和の生成関数を楕円関数を用いてあらわすことが出来たのは大きな進展であると考えている。

我々の一般デデキント和やその相互法則の理論は **Y. Manin-M. Marcolli** の modular shadow に関する論文

(“Modular shadows and the Levy-Mellin ∞ -adic transform” in “Modular form on Schiermonnikoog”, 189-238, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008) でも取り上げられており応用が期待できると考えている。

さらに研究分担者は結び目不変量と局所変形の関連を継続的に追求しており以下の論文解説に見られるように着実な成果をあげている。

以下にこの間発表した論文を年代順に解説する。

論文” Explicit formulas for Hecke operators on cusp forms, Dedekind symbols and period polynomials, **Shinji Fukuhara**, *J. Reine Angew. Math.* 607, 163-216 (2007) においては、尖点形式、周期および一般デデキント和の3者へのヘッケ作用素が一致すること、また明示的に表せることを示した。この公式はヘッケ行列を初等的な関数で表すものであり、従来とはまったくことなる跡公式を与えるものである。計算のアリゴリズムも与え、コンピュータでヘッケ行列を簡単に計算できるようにした。

次の論文” Dedekind symbols with plus reciprocity laws”, **Shinji Fukuhara**, *J. Number Theory* 128, 781-795 (2008)では、一般デデキント和の定義式のマイナスをプラスに変えるとどうなるかを論じた。プラスの場合は、相互法則関数が連分数を経由せず直接和を決定することが解った。一般には相互法則を考える上でマイナスを考えることの方が、意味がある事を示している。一般デデキント和の従来の定式化が妥当である事を再確認することになった。

研究分担者は二つの論文” C_n -moves and V_n -equivalence for links”, **Haruko Aida Miyazawa**, *Tokyo J. Math.* 32, 381-393 (2009)および” SC_n -moves and the $(n+1)$ -st coefficients of the Conway polynomials of links”, **Haruko Aida Miyazawa**, *Tokyo J. Math.* 32, 395-408 (2009)の中で、 C_n -move が **Vassiliev** 不変量にどのような変化をも

たらずのかを調べたり、 C_n -move が絡み目をどう変化させるのかを直接調べることで、Vassiliev 不変量の値と C_n -move の間の関係をより明らかにする研究を進めた。そして $n=2, 3$ の場合に絡み目の Vassiliev 不変量が一致するための必要十分条件を C_n -moves という局所変形の言葉で与えた。またコンウェイ多項式の係数が C_n -movesでどう変化するかを調べた。そして、位数 $n+1$ の Vassiliev 不変量であるコンウェイ多項式の $n+1$ 次の係数の C_n -move による変化が偶数であることを証明した。

代表者の論文” Period polynomials and explicit formulas for Hecke operators on $\mathbb{Y}\Gamma_0(2)$ ”, Shinji Fukuhara, Yifan Yang, Proc. Cambridge Philos. Soc. 146, 321-350 (2009)はTaiwanのYifan Yangとの共著である。ここでは合同部分群が $\mathbb{Y}\Gamma_0(2)$ であるときに、ヘッケ作用がいかなる式で明示的に与えられるかを研究している。ここでもコンピュータで計算できる形にまで具体化している。証明には $\mathbb{Y}\Gamma_0(2)$ の特殊性を使っているの、一般の合同部分群 $\mathbb{Y}\Gamma_0(N)$ のときに、同様のことがどこまで言えるかは解らない。今後の課題として残されている。

もう一つ論文” The elliptic Apostol-Dedekind sums generate odd Dedekind symbols with Laurent polynomial reciprocity laws”, Shinji Fukuhara, Math. Ann. 346, 769-794 (2010)で代表者は、懸案であった楕円アポストル・デデキント和を定義した。実はこの和に似たものとして楕円アポストル和を導入したことがあるが、これには2つ欠点があった。今回、この欠点を克服し完全なアポストル・デデキント和の楕円関数版といえる和が定義されたわけである。この和は多項式相互法則をもつ一般デデキント和の生成関数にもなっているのが特徴である。一般デデキント和の定義自体は抽象的なものであるが、楕円関数を用いて具体的な和の形で表せたのは、大きな意味があると考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

1.” The elliptic Apostol-Dedekind sums generate odd Dedekind symbols with Laurent polynomial reciprocity laws”, Shinji Fukuhara, Math. Ann. 346, 769-794 (2010) (査読有)

2.” Period polynomials and explicit formulas for Hecke operators on $\mathbb{Y}\Gamma_0(2)$ ”, Shinji Fukuhara, Yifan Yang, Proc. Cambridge Philos. Soc. 146, 321-350 (2009) (査読有)

3.” C_n -moves and V_n -equivalence for links”, Haruko Aida Miyazawa, Tokyo J. Math. 32, 381-393 (2009) (査読有)

4.” SC_n -moves and the $(n+1)$ -st coefficients of the Conway polynomials of links”, Haruko Aida Miyazawa, Tokyo J. Math. 32, 395-408 (2009) (査読有)

5.” Dedekind symbols with plus reciprocity laws”, Shinji Fukuhara, J. Number Theory 128, 781-795 (2008) (査読有)

6.” Explicit formulas for Hecke operators on cusp forms, Dedekind symbols and period polynomials”, Shinji Fukuhara, J. Reine Angew. Math. 607, 163-216 (2007) (査読有)

[学会発表] (計0件)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福原 真二 (FUKUHARA SHINJI)
津田塾大学・学芸学部・教授
研究者番号：20011687

(2) 研究分担者

宮澤 治子 (MIYAZAWA HARUKO)
津田塾大学・計数研・研究員
研究者番号：40266276

(3) 連携研究者

()

研究者番号：