

平成 21 年 5 月 24 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 — 2008

課題番号：19540103

研究課題名 (和文) 変形量子化による関数等式と非可換幾何学の研究

研究課題名 (英文) A research on functional identities and noncommutative geometry by deformation quantization

研究代表者 吉岡 朗

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号：40200935

研究成果の概要：複素数平面上の整関数は通常の積で可換な代数をなすが、変形量子化によりこの積を変形し、非可換な代数の構造を導入した。正則関数・特殊関数などに成立する関数等式が非可換な変形を受け、新たな等式が得られた。関数の集合に完備な位相を導入することにより非可換な指数関数をこの代数の中で与えることができる。これを用いてフーリエ変換、ラプラス変換などを考えることができた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2008 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：変形量子化，非可換関数論，非可換幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学，関数論，非可換幾何学，量子化，数理物理学

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 積の収束する変形量子化のクラスを設定し、微分方程式をもちいて非可換な指数関数を定義した。変形量子化をもちいてリー群の被覆群に対応する概念も構成可能であった。

(2) 非可換な指数関数を用いてデルタ関数、ガンマ関数、ベータ関数、楕円関数および非可換二次関数の逆元など、種々の関数とその等式が得られていた。

(3) 非可換な指数関数の特異点に起因する

分岐が観察されていた。

## 2. 研究の目的

(1) 変形量子化を、複素対称行列をパラメータとする積の族に拡張して、多数の変形量子化について考える。このようにして積のあいだの変換則を調べる。パラメータの自由度を利用して、非可換な関数等式を導く。

(2) 積の解析接続を考え、非可換指数関数の特異現象を調べる。また、これらを明確にするため、接続を導入して幾何学的に整理する。

### 3. 研究の方法

(1) 整関数に対して収束するべき級数の変形量子化を行う。これを用い、よく知られた初等的な正則関数に対して非可換な計算を数多く行う。これらの関数のみならず関数等式を非可換な積を用いて書き直す。また初等関数の関数等式を、非可換な指数関数を用いて非可換化する。

(2) 正則関数のもつ古典的な幾何学的性質が変形量子化による非可換な正則関数にどのように受け継がれていくのかを具体的に調べる。そのため、複素射影空間など古典的な幾何学でよく計算された具体的な多様体に対し、変形量子化の非可換な代数の例を構築する。また、作用素を用いて計算のされている非可換多様体、例えば非可換球面、非可換上半平面、非可換複素射影空間などを収束べき級数の変形量子化により書き直してみる。

(3) 収束する変形量子化は複素対称行列を正則なパラメータとする表現の変形を持つ。正則関数のこれらの積による非可換変形の正則関数としての性質を具体的に調べる。

### 4. 研究成果

(1) 変形量子化を用いて具体的な非可換関数を構成した。すなわち、非可換な指数関数を定義し、これを用いて非可換なガンマ関数、ベータ関数、三角関数などを定義した。

また、代数的には同型であるが表示の異なる変形量子化の族を構成した。これは複素数対象行列をパラメータとする族である。パラメータのある範囲においては収束性の非常によい非可換指数関数が得られることが分かり、これを用いて非可換な楕円関数を構成しその関数等式について考察した。

(2) 二次式の非可換指数関数は分岐を

持つことが分かっている。これが上に述べた種々の関数等式の構成において、分岐、多価性の原因であると思われる。これについて具体的に調べた。たとえば、非可換指数関数を用いたラプラス変換により逆元が得られるが、一つの元に対して逆元が複数得られることが分かり、これにより一般には代数の結合性が破れていることが分かる。

(3) 非可換な二次式は特殊線形リー代数と同型なものを与えることは知られているが、非可換指数関数を用いてリー群に対応するものが構成できる。さらにこの部分群を構造群にもつ幾何的な対象を具体的に構成しその多価性について考察した。

(4) ワイル代数を、それら生成元のorderingをきめることにより、モイナル積および複素多項式の集合を用いて与えられることはよく知られている。これらの一連のモイナル積を複素対象行列を用いて拡張することができた。これは従来のorderingsによる積の拡張概念であり、その積をすべてstar積と呼ぶ。それぞれのstar積による代数はワイル代数と同型である。この積による指数関数を考える。特に、2次式の非可換指数関数の積分表示を調べた。さらにこの非可換指数関数を用いて関数等式を得ることができることを示した。その応用としてstar積を用いて、ローレンツ計量をもつ4次元のLie群を構成した。また、クリフォード代数をstar積代数の部分代数として構成することができた。さらに、幾つかの具体的な二次式に対してその非可換指数関数の解析関数としての性質を詳しく調べた。特に、複素対称行列への依存性を具体的に考察した。この関数

は周期的な分岐特異点を持つが、そのリーマン面を調べた。また、リーマン面の型がパラメータのとり方により変化していくこともわかった。このことから、表示のパラメータによる変化の様子を追跡していくことがこれからの課題として重要であることも確認できた。次に、非可換指数関数どうしの積を調べるために、アダマールによる解析関数の特異点における正則化の考え方を応用し、正則化 (regularization) の方法を定義した。

このように変形量子化を用いることにより非可換な関数を具体的に構成し、具体例を得ることができる。それについて詳しく調べることは、今後の、非可換な代数を用いた幾何学の研究において重要な指標となり、これが本研究に意義を与えていると思われる。非可換な代数を用いて幾何学を展開するという方向性は、多くの幾何学者が興味をもちそれぞれの研究を始めているが、一般的な枠組みを作るには、まだ程遠い段階である。この点において、本研究において得られた具体例は一般的な枠組みを考察する上で基本的なものとなるであろう。この点において得られた結果に重要性を認めることができると思われる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki, Akira Yoshioka, A New non commutative nonformal calculus: Associativity and finite part regularization, *Astisque*, 321, 267-297, (2008), 査読有

- ② Akira Yoshioka, A family of star products and its application, *AIP Conference Proceedings*, 956, 37 - 42, (2007), 査読有
- ③ Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki, Akira Yoshioka, Orderings and Non-formal Deformation Quantization, 82, 153 - 175, (2007), 査読有
- ④ Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki, Akira Yoshioka, Expressions of Algebra Elements and Transcendental Noncommutative Calculus, *Noncommutative geometry and physics 2005, Proceedings of the international Sendai-Beijing joint workshop*, 3 - 30, (2007), 査読有
- ⑤ Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki, Akira Yoshioka, Noncommutative Minkowski Space and Transcendental Calculus, *PROGRESS OF THEORETICAL PHYSICS SUPPLEMENT*, 171, 184 - 195, (2007), 査読有
- ⑥ Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki, Akira Yoshioka, Non-formal deformation quantization of Frechet-Poisson algebras: The Heisenberg Lie algebra case, *comtemporary mathematics*, 434, 99 - 124, (2007), 査読有
- ⑦ Naoyuki Koike, A Chevalley type restriction theorem for a proper complex equifocal submanifold, *Kodai Mathematical Journal*, 30, 280-296, (2007), 査読有
- ⑧ Naoyuki Koike, Complex hyperpolar actions with a totally geodesic orbit, *Osaka Journal of Mathematics*, 44, 491-503, (2007), 査読有
- ⑨ Naoya Miyazaki, Lifts of symplectic

diffeomorphisms as automorphisms of  
a Weyl algebra bundle with Fedosov c  
onnection, International Journal of  
Geometric Methods in Modern Physics,  
4, 533-546, (2007), 査読有

[学会発表] (計 2 件)

- ① Akira Yoshioka, Noncommutative  
calculus by star products, Tenth  
international conference on  
geometry, integrability and  
quantization, 2008.06.09, Varna,  
Bulgaria
- ② Akira Yoshioka, Ordering problem in  
star product and star product  
identities, XXVI-th Workshop in  
geometric methods in physics,  
2007.0707, Bialowieza, Poland

[図書] (計 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

○取得状況 (計 件)

[その他]

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉岡 朗 (YOSHIOKA AKIRA)  
東京理科大学・理学部・教授  
研究者番号：19540103

### (2) 研究分担者

原 民夫 (HARA TAMIO)  
東京理科大学・工学部・教授  
研究者番号：10120205  
小池 直之 (KOIKE NAUYUKI)  
東京理科大学・理学部・准教授  
研究者番号：10120205  
前田 吉昭 (MAEDA YOSHIKI)  
慶応義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号：40101076  
宮崎 直哉 (MIYAZAKI NAOYA)  
慶応義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号：50315826

### (3) 連携研究者

大森 英樹 (OMORI HIDEKI)  
東京理科大学・理工学部・嘱託教授  
研究者番号：20087018