

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2009
課題番号：19540105
研究課題名（和文） 有限シュバレー群のコホモロジーの研究

研究課題名（英文） Cohomology of finite Chevalley groups

研究代表者

亀子 正喜 (KAMEKO MASAKI)
富山国際大学・現代社会学部・教授
研究者番号：50270343

研究成果の概要（和文）：いろいろな分野で取り上げられる有限シュバレー群について代数的位相幾何学の視点から有限シュバレー群のコホモロジーとリー群の分類空間の自由ループ空間のコホモロジーについて研究した。Brown-Peterson コホモロジーや Morava K-理論をふくむコホモロジーをいくつかのリー群の分類空間やその自由ループ空間そして有限シュバレー群について計算した。そして関連するスペクトル系列の計算をおこなった。

研究成果の概要（英文）： Finite Chevalley groups appear in many academic disciplines. We investigated the cohomology of finite Chevalley groups and free loop spaces of classifying spaces of Lie groups from the viewpoint of algebraic topology. We computed the cohomology, including Brown-Peterson cohomology and Morava K-theories, for several finite Chevalley groups, classifying spaces of Lie groups and free loop spaces of classifying spaces of Lie groups. We also computed related spectral sequences.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何

1. 研究開始当初の背景

ホモトピー論の観点からのコンパクトリー群の拡張である p -コンパクト群（この文脈では l -コンパクト群というべきかもしれない）の研究においても Broto-Møller は有限シュバレー群の分類空間の類似を研究している。

代数幾何の観点からは Toraro は複素代数群にたいして分類空間を定義しその Chow 環を研究している。Guillot は有限シュバレー群の Chow 環について研究している。また Vistoli はわれわれと独立に $BP_*BPGL_p(C)$ の Chow 環を計算している。

当該研究の根底には, Quillen による $GL_n(F_q)$ のコホモロジーおよび代数的 K -理論の研究に関する研究がある. Friedlander によれば有限シュバレー群の分類空間 $BG(F_q)$ に対し引き戻し可換図式がある. 一方で, 連結コンパクトリー群 G に対し, 単位円 S^1 から G への微分可能写像全体のなす空間を考えると無限次元リー群, ループ群, になる. このループ群の分類空間はもとのリー群 G の分類空間 BG の自由ループ空間 LBG とホモトピー同値でここでも引き戻し可換図式が存在し Eilenberg-Moore スペクトル系列が存在する. このスペクトル系列の E_2 -項は有限シュバレー群の Z/ℓ 係数コホモロジーに収束する Eilenberg-Moore スペクトル系列の E_2 -項と一致する. したがって Eilenberg-Moore スペクトル系列の計算という視点からみればわれわれは有限シュバレー群のコホモロジーと無限次元リー群であるループ群の分類空間のコホモロジーの計算が同列に扱えるはずである. これから有限シュバレー群とループ群の分類空間の一般コホモロジーの間になんらかの関係があることが推測される.

$\ell \neq 2$ で整数上の簡約群スキーム G_Z が GL_n の場合, 対応する連結コンパクトリー群 G はユニタリ群 $U(n)$ で BG のコホモロジーは多項式環になり上の Eilenberg-Moore スペクトル系列の計算は容易でその結果, E_2 -項は多項式環と外積代数のテンソル積の形になり, さらに E_2 -レベルで自明になる. 有限シュバレー群のコホモロジーの環構造も簡単に決定できる. しかしながら, もとの連結コンパクトリー群 G の整係数ホモロジーが ℓ -torsion を持つ場合にはスペクトル系列の E_2 -項の計算自体が容易ではない. このような有限シュバレー群として $PSU(n)$ に対応する $PSL_n(F_q)$ 以外にも $\ell = 2$ のときの $Spin_n(F_q)$ ($n \geq 10$), $E_6(F_q)$, $E_7(F_q)$, $E_8(F_q)$ や $\ell = 3$ のときの $F_4(F_q)$, $E_6(F_q)$, $E_7(F_q)$, $E_8(F_q)$ や $\ell = 5$ のときの $E_8(F_q)$ がある.

2. 研究の目的

コンパクトリー群 G に対してその複素化である複素代数群 $G(C)$ が存在する. シュバレーは任意のコンパクトリー群と任意の環 K に対して $G(K)$ という群が存在することを示した. K が有限体の場合, $G(K)$ は有限群になる. 当該研究では代数的位相幾何の手法である各種のスペクトル系列を用いてシュバレー群の分類空間のコホモロジーをいくつかのシュバレー群にたいして具体的に計算することによって一見すると全く

別のものである有限シュバレー群 (有限群) とループ群 (無限群) の両方に共通するコホモロジー論的な性質について探求する.

3. 研究の方法

有限シュバレー群, 連結コンパクトリー群の分類空間とその自由ループ空間のコホモロジーの研究を Eilenberg-Moore スペクトル系列, Leray-Serre スペクトル系列, change-of-rings スペクトル系列, Steenrod 代数の計算を中心にして行なう. コンピュータ代数システム Singular などを用いたコンピュータでの計算も行なう. この研究では複素コボルディズム論などの一般コホモロジーだけではなくモチービックコホモロジーなどの視点から得られた結果を解釈することやモチービックコホモロジーの計算へ応用することが重要になる. 研究分担者, 連携研究者との連絡, 討論を通して群の分類空間の BP コホモロジー, Morava K -理論,モチービックコホモロジーの研究も行う. この研究では G が ℓ -torsion をもつ重要な連結コンパクトリー群の例として例外リー群について研究することが重要である. 例外リー群の研究も行う.

4. 研究成果

(1) 有限シュバレー群の $\text{mod } 2$ コホモロジーの計算に関しては Kleinerman や Kuribayashi-Mimura-Nishimoto のスピノール群に随伴する有限シュバレー群の $\text{mod } 2$ コホモロジーの計算の再検討からはじめて q が奇素数のべきの場合に例外リー群 E_6 に随伴する有限シュバレー群 $E_6(F_q)$ の $\text{mod } 2$ コホモロジーの計算を一つの目標としていたが, $Spin_{10}(F_q)$, $E_6(F_q)$ さらには射影ユニタリ群 $PU(4n+2)$ に随伴する有限シュバレー群の $\text{mod } 2$ コホモロジーに収束するスペクトル系列の E_2 項の計算が見通しよくできることを示した. これについては 2007 年 11 月の金沢でのホモトピー論シンポジウムで発表した.

(2) 有限シュバレー群の分類空間の Morava K -理論については有限シュバレー群 $SO_3(F_q)$ の分類空間の Morava K -理論の計算を行った. これについては 2007 年 9 月の信州大学での研究集会で発表した. 例外リー群の分類空間の Morava K -理論については Kameko-Yagita の手法を $\text{mod } 2$ の場合にも適用できるようにしてそれを用いて G_2 , E_6 の分類空間の Morava K -理論を計算した. これについては 2007 年 8 月のトポロジーシンポジウムで発表した.

(3) 例外リー群の分類空間のコホモロジーに関しては例外リー群 E_7 の分類空間の

mod 2 コホモロジーがグレブナ基底の理論の応用として計算できることを示し、次数 6 の生成元で局所化したものへの埋め込みを考えることにより従来より簡単に記述できることがわかった。さらに E_7 の分類空間の mod 2 コホモロジーのベキ零元を記述した。これについては 2008 年 11 月に高松市で行われたホモトピー論シンポジウムで発表した。この手法を例外リー群 E_8 の分類空間の mod 2 コホモロジーの計算にも応用し例外リー群 E_8 の分類空間の mod 2 コホモロジーに収束するスペクトル系列の E_2 項に収束するスペクトル系列で E_2 項が多項式環となるものの E_3 項を計算した。この結果については 2009 年 3 月に東京工業大学で行われた研究集会で発表した。

(4) 当初の計画にはなかった展開として Weyl 群の不変式環と分類空間の整係数コホモロジーの自由部分との比較問題についての研究を行った。これについては 2008 年 3 月の九州大学での研究集会で発表した。

(5) 定義体が十分大きい場合に有限シュバレー群のコホモロジーと有限シュバレー群に対応するコンパクトリー群の分類空間のコホモロジーが次数付きのベクトル空間として同型になるという結果についてはプレプリントの形にまとめ 2008 年 10 月に Wesleyan University で行われたアメリカ数学会で発表するとともにプレプリントサーバー arXiv にアップロードするという形で発表した。さらに 2009 年 5 月の北京 (中国) での研究集会と 2010 年 2 月の香川大学での研究集会で発表した。

(6) 連携研究者柳田伸顕教授と Chow ring の Chern 類について研究し、得た結果をプレプリントの形にまとめ 2008 年 10 月にプレプリントサーバー arXiv にアップロードし 2009 年 1 月に行われた福岡大学での研究集会で発表した。この結果は最終的には Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010) に掲載された。

(7) 極大トーラスの巡回群による拡大を極大トーラスの正規化部分群の中にとり、これについての同変コホモロジーの研究としてコンパクトリー群および有限シュバレー群の分類空間のコホモロジーを見直すことがより自然であるという着想を得た。これについては 2009 年 9 月の信州大学での研究集会で発表した。また論文としてまとめたものが数理解析研究所講究録に掲載される予定である。射影ユニタリ群の分類空間のコホモロジーについて適切な元で局所化することにより mod 2 コホモロジーがより簡潔に表示できることが判明した。これについ

ては 2009 年 12 月のハノイ (ベトナム) での研究集会で発表した。

(8) 琉球大学の手塚康誠教授と茨城大学の柳田伸顕教授との共同研究として多項式環と外積代数のテンソル積の不変式環と例外群の分類空間のモチービクコホモロジーに関連したコホモロジーの同型についての結果を得、プレプリントの形にしてドイツのプレプリントサーバーにアップロードしてある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

(1) Masaki Kameko and Nobuaki Yagita, Chern subrings. Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 367--373. (査読あり)

(2) Masaki Kameko, On the cohomology of finite Chevalley groups and free loop spaces. Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 1581 (2008), 45--54. (査読なし)

(3) Masaki Kameko and Mamoru Mimura, On the Rothenberg-Steenrod spectral sequence for the mod 2 cohomology of classifying spaces of spinor groups. Geometry & Topology Monographs 13 (2008), 261--279. (査読あり)

(4) Masaki Kameko and Nobuaki Yagita, The Brown-Peterson cohomology of the classifying spaces of the projective unitary groups PU(p) and exceptional Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 2265-2284. (査読あり)

(5) Masaki Kameko and Mamoru Mimura, Mui invariants and Milnor operations, Geometry & Topology Monographs 11 (2007), 107--140. (査読あり)

(6) Masaki Kameko and Mamoru Mimura, On the Rothenberg-Steenrod spectral sequence for the mod 3 cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group E_8, Geometry & Topology Monographs 10 (2007), 213-226. (査読あり)

[学会発表] (計 14 件)

(1) 亀子正喜, Finite Chevalley groups and loop groups, 香川セミナー, 2010 年 2 月 20 日, 香川大学

(2) 亀子正喜, On the cohomology of classifying spaces of projective unitary groups, EACAT3, 2009年12月14日 Hanoi, Vietnam

(3) 亀子正喜, Cohomology of the cyclic group Z/p , 有限群のコホモロジーの研究集会, 2009年9月4日, 信州大学

(4) 亀子正喜, Finite Chevalley groups and loop groups, International Conference on Algebraic Topology, Beijing, 2009年5月29日, Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences in Beijing, China

(5) 亀子正喜, E_8 の Cotor の計算に向けて, 代数トポロジー東京セミナー, 2009年3月10日, 東京工業大学

(6) 亀子正喜, Chern subrings, 福岡ホモトピー論セミナー, 2009年1月11日, 福岡大学セミナーハウス

(7) 亀子正喜, Nilpotent elements in the mod 2 cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group E_7 , ホモトピー論シンポジウム, 2008年12月5日, サポートホール高松

(8) 亀子正喜, Finite Chevalley groups and loop groups 2008 AMS Fall Eastern Section Meeting, 2008年10月12日, USA

(9) 亀子正喜, Rings of invariants of Weyl groups of spinor groups, ホモトピー論小研究集会, 2008年3月27日, 九州大学

(10) 亀子正喜, Cotorsion products associated with projective orthogonal groups $PO(4n+2)$ ホモトピー論シンポジウム, 2007年11月14日, 金沢歌劇座

(11) 亀子正喜, Morava K-theories of certain finite Chevalley groups, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 2007年9月7日, 信州大学

(12) 亀子正喜, On the cohomology of finite Chevalley groups and free loop spaces, RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論」, 2007年8月29日, 京都大学

(13) 亀子正喜, Morava K-theories of classifying spaces of compact Lie groups, トポロジーシンポジウム, 2007年8月7日, 会津大学

(14) 亀子正喜, Morava K-theories of the classifying space of the exceptional Lie group G_2 , 京都大学月曜ホモトピー論セミナー, 2007年5月21日, 京都大学

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

亀子 正喜 (KAMEKO MASAKI)

富山国際大学・現代社会学部・教授

研究者番号: 50270343

(2) 研究分担者

柳田 伸顕 (YAGITA NOBUAKI)

茨城大学・教育学部・教授

研究者番号: 20130768

三村 護 (MIMURA MAMORU)

岡山大学・名誉教授

研究者番号: 70026772

(3) 連携研究者

()

研究者番号: