

平成22年4月22日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540106

研究課題名（和文）ホップ不変量の安定性とホップ構成の研究

研究課題名（英文）A study of stable Hopf invariants and Hopf constructions

研究代表者

小田 信行（ODA NOBUYUKI）

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：80112283

研究成果の概要（和文）：箱積と両側行列戸田積を含む様々な公式を証明し、ホップ不変量との関係を含む戸田による古典的な公式の一般化も得られた。LS カテゴリーと密接に関係する空間のクラスを定義し、被覆空間との関係を解明することにより、具体例を調べる可能性が広がった。指数位相と呼ばれる位相から定義される関数空間の位相を研究し、すべての位相空間に対して成立する指数同相定理を証明し、その定理の応用として種々の結果を得た。

研究成果の概要（英文）：Formulas are obtained among box brackets and matrix Toda brackets. Generalizations of classical formulas by Toda are obtained including relations with the Hopf invariants. A class of spaces is defined which is closely connected with the LS category. Relations between the class and covering spaces are clarified which are useful to study examples. Topologies of function spaces which are defined by the exponential topology are studied. Exponential homeomorphisms are proved which hold for any topological spaces and applications of the theorem are obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー

1. 研究開始当初の背景

ホップ不変量は球面のホモトピー群において非零元の存在を示すため開発されたが、その理論はLS カテゴリー論などと結びついて発展していた。また、Marcum等の研究により様々なホップ不変量の統一的な扱いが研究

されていた。ホップ不変量と密接に関係してホップ構成とよばれる写像の構成方法がある。以前から知られていたホップ構成は余群状空間と余ホップ写像のコファイバー列に一般化され、さらにファイバー列に対して完全に双対な結果が得られることが分る。これ

らの様々なホップ不変量を用いて新しい概念を定義して、古典的応用の拡張を試みる事が課題であった。

2. 研究の目的

Marcum 等のホップ不変量を W -トポロジー等の場合へ拡張し、その応用を研究する。これらの W -ホップ不変量等を調べるために、安定 W -ホモトピー群等の概念を用いる。例えば、 W が Moore 空間のとき、球面の W -ホモトピー群を山本の結果により球面の安定ホモトピー群を用いて記述し、非安定 W -ホモトピー群の周期族等の構造を解明する。さらに、従来知られているホップ構成を一般化する。例えば、Arkowitz と Silberbush によるホップ型構成をコファイバー列による構成を用いることにより調べる。歴史的には、ホップ構成により定義された写像の非自明性はホップ不変量を用いて調べられることが多いが、まだ余り研究されていない一般化されたホップ構成と一般化されたホップ不変量の関係を調べる。本研究の目的は、このような新しいホップ不変量とホップ構成の基礎理論と応用研究を安定ホモトピー論の手法を用いて研究すると同時に、そのための基礎理論として、関数空間の位相および一般位相空間の理論を応用可能な形で研究することである。

3. 研究の方法

(1) W -ホップ不変量の有効性を示すため W -ホップ不変量の Gray の非安定周期族への応用を試みる。そのために、山本分解の各項に現れる周期族を決定し、ホップ不変量との関係を決定する。この方法は現在知られている安定周期族に関連する結果を得るために特に有効である。また、小田の非安定周期族への応用も検討する。

(2) 球面の非安定ホモトピー群への応用のために箱積を研究し、戸田積で知られている様々な定理を箱積に対して定式化し、ホップ不変量と関係する新しい応用可能な定理を研究する。箱積は特別な場合として、行列戸田積や古典的な戸田積を含み、さらに、3箱図式に付随した4つの操作や2側行列戸田積なども定義されているので、それらに対するホップ不変量についても調べる。

(3) ホップ不変量と様々な2次結合との関連を解明する。応用として、複体の間のホモトピー集合における非零元の構成も試みる。特に、箱積等の2次結合の研究を行い、ホモトピー群の中で古典的な戸田積ではなく箱積等の2次結合により表現できる新しい生成元を研究し、生成元間の関係式の決定を試みる。

(4) また、Arkowitz と Silberbush の結果を Γ ホップ構成に拡張することが可能であるのでそれに関する結果を導く。これらの新

しいタイプのホップ不変量のホモトピー論への応用を研究する。ホップ空間の分解定理の双対の研究もおこなう。また、具体的ないくつかの場合に対してホップ不変量の計算を行う。古典群を例として研究する。

(5) 行列戸田積とホップ不変量の関係を研究する。具体的な空間として球面を調べ、球面の非安定ホモトピー群に対して戸田積および箱積の応用を研究する。特に箱積の表す非零元を調べ、その応用を研究する。

(6) ホップ空間の分解定理の双対の研究をおこなう。また、具体的ないくつかの場合に対してホップ不変量の計算を行い、複体の LS カテゴリーの決定に応用することを試みる。巡回写像の一般化の応用を研究する。具体的な空間として球面を調べ、球面の非安定ホモトピー群において、戸田積および箱積の懸垂とホップ不変量との関係を研究する。

(7) 約対角写像とホップ不変量の関係、およびホワイトヘッド積、戸田積とホップ不変量の関係を解明する。

(8) Milnor と Stasheff によるフィルター付けを用いた手法により T 空間の一般化を定式化し、一般化された巡回写像との関係を研究する。具体例として射影空間等を調べる。被覆空間との関係を解明することにより多くの空間への応用が期待できる。この理論は、 LS カテゴリーと深い関係があるので、現在知られている LS カテゴリーの結果との関係も視野に入れて研究する。

(9) 任意のペアリングに対して、ホップ構成を定義することが可能であるので、関数空間のペアリングの研究とそれを可能とする関数空間の位相の研究がホップ構成を研究する上で重要である。基点を考えない位相空間及び、基点付きの位相空間で指数位相と呼ばれる位相から定義される関数空間の位相を研究する。基点付きの位相空間の圏での結果が得られることにより代数的位相幾何学への応用を可能とするので重要である。特に、関数空間のペアリングの定理を研究する。

(10) これらの理論に応用するため、一般位相空間の研究も併せて行う。

4. 研究成果

(1) 戸田積は球面のホモトピー群を決定するのに極めて有効であることが知られているが、二側行列戸田積を研究し、古典的な戸田積で知られている様々な定理を二側行列戸田積の性質を利用することにより一般化することに成功した。箱積に対しても戸田積の結果を一般化する公式を証明した。これらの公式は球面のホモトピー群等の生成元間の関係式を研究するのに有効に応用される。(論文④、発表③ ⑨ ⑩)

(2) 戸田積の一般化として、箱積が定義されているが、箱積は古典的な戸田積だけで

なく行列戸田積を含む。ホップ不変量は写像の非自明性を調べるために有効に用いられることがあるが、箱積に対して、ホップ不変量の公式が得られた。

(3) 写像空間の位相の研究がC開位相に対して行われ古典的な結果を拡張した新しい結果が得られた。(論文⑥)

(4) ゴットリーブ群および関数空間の位相と関係して、評価写像の代数的研究の結果を得ることができた。(論文⑤)

(5) 2-カテゴリーにおいて、箱積と両側行列戸田積を含む様々な関係式を証明した。これらの定理の応用として、戸田による古典的な公式の一般化も得られた。具体的な応用例として、球面の非安定ホモトピー群における戸田積および箱積の計算をいくつかの場合に実行することができた。(論文④)

(6) W がムーア空間のとき、球面の W -ホモトピー群を山本の結果により球面の安定ホモトピー群を用いて記述し、 W -ホップ不変量を用いて安定ホモトピー群の中で非零性を判定することにより、非安定 W -ホモトピー群の周期族をいくつか見いだした。

(7) Marcum 等のホップ不変量をファイブレーションとその双対へ拡張することができた。

(8) 箱積等の 2 次結合の一般化の研究を行い、ホモトピー群の中で古典的な戸田積ではなく新しい方法で生成元を定義し、生成元の間関係式を調べることができた。この定式化の有用性が示された。(論文③)

(9) 一般位相空間の研究として中岡史絵(福岡大学)と小田は γ 作用素を用いた極小閉集合等に関する結果を得た。(発表⑩ ⑬)

(10) Marcum と小田の共同研究により、一般化されたホップ構成と一般化されたホップ不変量の間関係を調べ、2 次結合との関係を含む定理を得た。ファイブレーションの分解とホップ不変量との関係が得られた。また、行列戸田積とホップ不変量との関係も解明できた。具体例として、射影空間のホモトピー群について調べた。

(11) Milnor-Stasheff によるフィルター付けを用いることにより T 空間の一般化を定式化することができた。被覆空間との関係を解明することにより、具体例を調べる可能性が広がった。この研究により、LS カテゴリーと関係する位相空間のクラスを定義した。代表的な例として、射影空間、レンズ空間、3 個以下の胞体を持つ空間を調べ、LS カテゴリーとの関係を与える定理等の結果を得た。(論文①)

(12) BBT 積と指数位相と呼ばれる位相から定義される関数空間の位相を研究しすべての位相空間に対して成立する指数同相定理を証明し、様々な応用と従来から知られている定理との関係を調べ、新しい応用も得ら

れた(論文②, 発表⑥ ⑫)。さらに、 k 空間を拡張する理論を得た(発表④ ⑤)。

(13) 基点付きの位相空間で、基点をもつ任意の位相空間に対して指数関数が全単射になる条件、連続な全単射になる条件、同相になる条件を得た。この位相は代数的位相幾何学への応用が可能である。CW-複体については、胞体構造を用いた幾何学的な考察により精密な結果が得られた。また、関数空間のペアリングの定理がいくつかの条件をみえず関数空間関手に拡張できることを証明した。この手法は同変空間の間関数空間への群作用の研究に応用できることが示された(発表① ② ⑦ ⑧)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

① N. Iwase, M. Mimura, N. Oda and Y. S. Yoon,
The Milnor-Stasheff filtration on spaces and generalized cyclic maps,
Canadian Mathematical Bulletin, to appear.
査読有

② Y. Hirashima and N. Oda,
Brown-Booth-Tillotson theory for classes of exponentiable spaces,
Topology and its Applications 156 (2009), 2264--2283. 査読有

③ H. J. Marcum and N. Oda,
Long box bracket operations in homotopy theory,
Applied Categorical Structures,
(published online February 19, 2009;
DOI 10.1007/s10485-009-9186-3). 査読有

④ H. J. Marcum and N. Oda,
Composition properties of box brackets,
Journal of the Mathematical Society of Japan 61 (2009), 507--549. 査読有

⑤ Y. Hirato, K. Kuribayashi and N. Oda,
A function space model approach to the rational evaluation subgroups,
Mathematische Zeitschrift 258 (2008), 521--555. 査読有

⑥ Y. Hirashima and N. Oda,
Pairings of function spaces,
Topology and its Applications 154 (2007), 2412--2424. 査読有

〔学会発表〕(計13件)

① 平嶋康昌, 小田信行 :
Classes of exponentiable spaces and pairings of function spaces,
2010年3月25日,
日本数学会年会,
慶応義塾大学

② 平嶋康昌, 小田信行 :
Exponential homeomorphisms in the category of based spaces,
2010年3月25日,
日本数学会年会,
慶応義塾大学

③ 小田信行 :
Box brackets について
(joint work with K. A. Hardie, K. H. Kamps and H. J. Marcum),
2010年3月16日,
(非)可換代数とトポロジー,
信州大学

④ 平嶋康昌, 小田信行 :
kC-空間の圏を含むデカルト的閉圏の存在について,
2009年11月1日,
ホモトピー論シンポジウム,
姫路市民会館

⑤ 平嶋康昌, 小田信行 :
kC-空間の圏を含むデカルト的閉圏について,
2009年9月26日,
日本数学会年会,
大阪大学

⑥ 平嶋康昌, 小田信行 :
Top をモノイダル閉圏にする積について,
2009年9月26日,
日本数学会年会,
大阪大学

⑦ 平嶋康昌, 小田信行 :
Brown-Booth-Tillotson theory and pairings of function spaces,
2009年8月22日,
位相空間論とその応用,
福岡大学セミナーハウス

⑧ N. Oda :
Classes of exponentiable spaces and pairings of function spaces
(joint work with Y. Hirashima),
Monday, June 29, 2009,
Category Theory 2009,
University of Cape Town,

June 29--July 4, 2009.

⑨ N. Oda :
Composition properties of box brackets
(joint work with H. J. Marcum),
Saturday, October 4, 2008,
International conference on Algebraic Topology 2008 at Korea University, Seoul
(2008年10月2日から5日)

⑩ 中岡史絵, 小田信行 :
Maximal γ -open sets and minimal γ -closed sets,
2008年8月24日,
位相空間論とその応用,
福岡大学セミナーハウス

⑪ H. J. Marcum, N. Oda :
The 2-sided matrix Toda brackets and some relations among classical Toda brackets,
March 15, 2008,
Kyoto seminar on algebraic topology in honor of Moo Ha Woo,
Kyoto University.

⑫ 平嶋康昌, 小田信行 :
On the class of exponentiable spaces,
2007年11月14日,
ホモトピー論シンポジウム,
金沢歌劇座会議室

⑬ 中岡史絵, 小田信行 :
Minimal objects and maximal objects,
2007年8月18日,
位相空間論とその応用,
福岡大学セミナーハウス

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計◇件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小田 信行 (ODA NOBUYUKI)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号： 80112283

(2) 研究分担者

石黒 賢士 (ISHIGURO KENSHI)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号： 00268971

岩瀬 則夫 (IWASE NORIO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号： 60213287

(H20 から 連携研究者 へ)

鳥居 猛 (TORII TAKESHI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号： 30341407

(H20 から 連携研究者 へ)

(3) 連携研究者

平嶋 康昌 (HIRASHIMA YASUMASA)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号： 80047399

(H20 から 連携研究者)