

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2009

課題番号：19540107

研究課題名 (和文) リーマン多様体の放射曲率と位相

研究課題名 (英文) Radial curvature and topology of Riemannian manifolds

研究代表者

塩濱 勝博 (Shiohama Katsuhiro)

福岡大学・理学部・非常勤講師

研究者番号：20016059

研究代表者の専門分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：リーマン計量, 曲率, 測地線

#### 1. 研究計画の概要

完備点付きリーマン多様体の放射曲率が平面モデル又は球面モデルの放射曲率によって下から支えられている場合の多様体の位相を調べる事が本研究の目的である。基点を頂点の一つとする測地三角形の頂角に関する Toponogov の比較定理が本研究に重要な役割を果たす。

#### 2. 研究の進捗状況

モデル曲面の切断跡の構造を調べ、ワーピング関数の挙動によって多様体の剛性定理が成立する場合は申請者と田中実・東海大教授との共同研究で調べられていた。本研究により剛性定理が成立しない場合にはモデル曲面の基点から十分遠方にある点の切断跡の構造が調べられ、その結果として多様体の有限連結性及び端点集合の個数等が調べられている。しかし、一般の平面モデルを参照空間とする完備点付き多様体上の任意の測地三角形に対しては Toponogov の定理は成立せず、いわば『Generic な測地三角形』に対してのみ成り立つ事が解明された。上述の結果はその応用例のひとつである。放射曲率の概念を根本的に問い直す事によって新しい展望が開けてきた。放射曲率の最も単純な例はユークリッド空間  $\mathbf{R}^n$  である。

(1)  $\mathbf{R}^n$  の各点の切断跡は空だから  $\mathbf{R}^n$  の距離関数、Busemann 関数は滑らかで、それをコンパクト部分多様体に制限すればモース関数が得られる。その臨界点に於ける指数は主曲率の符号が負となるものの個数に等しい。この性質を Lipschitz-Killing 曲率の計算に取り入れた申請者と許洪偉・浙江大学教授は、一般化された Gauss-Bonnet, 部分多様体の全

曲率に関する Chern-Lashof の諸定理を統一的且つスマートに解決した。

(2)  $\mathbf{R}^n$  の次に単純な例は断面曲率一定 (一定でない) な空間  $\mathbf{S}^n(1)$ ,  $\mathbf{H}^n(-1)$  内の全臍的超曲面であろう。従来の曲率と位相の研究で Toponogov の比較定理を使うものはこの範囲に入る。

(3) 断面曲率一定の条件を緩めて平面モデルや球面モデルが生じた。これが本研究の主目的であった。その成果は上述の通りである。

#### 3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している。放射曲率条件下での Toponogov の比較定理は基点の対辺が必ずしも最短ではない一般化された測地三角形に対してのみ有効であったが、本研究によって基点を頂点のひとつとする殆ど全ての通常の測地三角形に対しても成り立つ事が解った。これにより放射曲率と位相の研究は更に進展するだろう。

#### 4. 今後の研究の推進方策

モデル曲面の切断跡の研究を通じて放射曲率の概念を正則断面曲率一定の射影空間や双曲空間内の実超曲面に適用するアイデアが生じた。実超曲面の法線ベクトルが定める曲率変換と実超曲面の型作用素との密接な関連に於いて超曲面の大域的な特徴付けが可能となるだろう。放射曲率の概念は断面曲率一定空間内の全臍的超曲面と捉えられ、この自然な拡張概念として上述の完備実超曲面論が浮上した。これは部分多様体の幾何学やリー群論の研究者を含めた多数の研究者の研究対象となっている世界ではあるが、従来の研究の視点は全て局所的な視点に立つ

ものばかりである。測地線論からの大域的研究は濱田龍義・福岡大助教と申請者の共同研究によって初めて得られた。この様にして放射曲率と位相の研究を正則断面曲率一定空間内の完備実超曲面の大域的研究に発展させる機運が生じた。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① 塩濱勝博 and Xu Hongwei, An Integral formula for Lipschitz-Killing curvature and the critical points of height functions, to appear in J. Geometric Analysis, 査読有.
- ② 濱田龍義、塩濱勝博 Complete real hypersurfaces in compact rank one symmetric spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 137 (2009), 3905--3910, 査読有.
- ③ K. Kim, 印南信宏、猿子幸弘、塩濱勝博, The Steiner ratio conjecture of Gilbert-Pollak may still be open、Algorithmica, (2008), 査読有.

[学会発表] (計4件)

- ① 塩濱勝博, Rdial curvature and topology of complete noncompact manifolds, Global Analysis and Differential Geometry, Saga University, 2009年3月21日
- ② 塩濱勝博, Complete real hypersurfaces in hyperbolic spaces with constant holomorphic sectional curvature, 2009年3月3日, (横浜市立大学数学セミナー)
- ③ 塩濱勝博, 双曲空間内の完備実超曲面, 2009年2月21日, リーマン幾何と幾何解析, (筑波大学研究集会)
- ④ 塩濱勝博, 標準的射影空間内の完備実超曲面, 2008年11月21日, Geometry and something, (福岡大学微分幾何研究会)