

機関番号：11501

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540110

研究課題名 (和文) Clutter の Ideal 性についての「よい特徴付け」を目指して

研究課題名 (英文) Toward “good characterizations” of idealness of clutters

研究代表者

佐久間 雅 (SAKUMA TADASHI)

山形大学・地域教育文化学部・准教授

研究者番号：60323458

研究成果の概要 (和文)：

本研究では、グラフのコードレス奇数点サイクルの点集合を hyperedge とする clutter やその一般化に当たる、有向マトロイド上の正コサーキットのなす clutter について、その ideality や packing property についての禁止マイナー型特徴付けに成功した。

研究成果の概要 (英文)：

In this study, we succeeded to characterize the ideality and the packing property for several classes of clutters which are corresponding to (a generalized classes of) the odd-holes of graphs by using the excluded clutter minors.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,400,000	1,200,000	4,420,000

研究分野：離散数学，組合せ最適化

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：(1) clutter (2) ideality (3) excluded minor (4) MFMC-property (5) odd-hole recognition

(6) path-parity (7) claw-free graph (8) pebble motion planning

1. 研究開始当初の背景

1994 年、Cornuejols and Novick は、以下の予想を提起した：

Ideal Clutter Conjecture. 十分大きい位数を持つ *minimally nonideal clutter* は、縮退した射影平面 J_n であるか、もしくはその *core* として奇数点サイクルクラッター C_{2n+1}^2 、あるいはそのブロッカー C_{2n+1}^{n+1} を持つ。

Blocking 整数多面体 (ideal clutter) の理論と Anti-Blocking 整数多面体 (perfect graph) の理

論の間には深い類似関係がある。上述の予想も、perfect graph を特徴づける予想として名高い「The Strong Perfect Graph Conjecture」(「Minimally imperfect graph は5点以上の奇数点コードレスサイクルとその補グラフに限られるであろう」という言明) の Blocking 整数多面体の理論における対応物 (counterpart) として、当該理論の中心に位置する重要な予想であり、その解決が強く望まれている。ただし、既に C_{2n+1}^2 や C_{2n+1}^{n+1} 等の無限系列の他に、互いに同型でない core が少なくとも 50

種類以上発見され、minimally non-ideal clutter に至っては、 C^2_{2n+1} や C^{n+1}_{2n+1} を core として持たないものが優に1000種類以上も見つかっている。すなわち「 $J_n; C^2_{2n+1}; C^{n+1}_{2n+1}$ 以外の[有限個の]禁止マイナーをすべて同定していく」という方針では、この予想の解決は難しい。「The Strong Perfect Graph Conjecture」自体は、折しも2006年7月に出版された、Chudnovsky, Robertson, Thomas and Seymourの共著論文によって歴史的な解決を見た。更に驚くべきは、上記の結果をChudnovsky, Cornuejols, Liu, Seymour and Vuskovicによる2005年の結果と合わせることで、Anti-Blocking 多面体の整数性が多項式時間(多面体の次元の9乗のオーダー)で判定可能となったことである。このことは、Blocking 多面体の世界においても、素性の分かった無限系列のみが禁止構造となる整数多面体のクラスは、Edmondの意味での「よい特徴付け」を持つ(NP co-NPに属する)可能性が高いことを意味している。すなわち、縮退した射影平面 J_n 、奇数点サイクルクラッター C^2_{2n+1} 、およびそのブロッカー C^{n+1}_{2n+1} の3つの無限系列のみを禁止マイナーとして持つような、Blocking 整数多面体の自然なクラスに焦点を当て、理論の核となる雛形を作り上げることの重要性を示唆している。このクラスの構造さえ明らかに出来れば、余分な[有限個の]禁止マイナーを付加した場合の振る舞いについても(マイナーの具体的な形に依存しない)定性的な議論を展開できる可能性は高いので、結果的にIdeal Clutter Conjectureの解決にも大きく貢献するものと考えられる。

2. 研究の目的

従って、本研究では、 $J_n; C^2_{2n+1}; C^{n+1}_{2n+1}$ の3つの無限系列のみを禁止マイナーにもつ、ideal clutterの自然なクラスを構成することに焦点を当てる。具体的には、最近筆者が提起した以下の2つの予想に取り組み、究極的な目標として、これらのクラッターのクラスを統合する、より広い自然なクラスを同定することを目指す。

3. 研究の方法

1) : 筆者は柏原賢二氏との共同研究の成果として、「co-rank が4以下の有向マトロイドの正サーキットからなるクラッター(およびそのブロッカー)がidealであるための禁止マイナーは、 $J_n; C^2_{2n+1}; C^{n+1}_{2n+1}$ の3つの系列のみである。」ことを証明した。筆者は、co-rankの制限を外しても依然として、

Conjecture 1. 有向マトロイドの正サーキットからなるクラッター(およびそのブロッカー)がidealであるための禁止マイナーは、 $J_n; C^2_{2n+1}; C^{n+1}_{2n+1}$ の3つの無限系列のみである。と予想している。この予想が成立すれば、Lucchesi-Younger(1978)、Guenin(2001)等、既存の主要な結果の多くが包含される。

2) : 他方、筆者はReed(1999)およびRautenbach and Reed(1999)等の結果をふまえ、**Conjecture 2.** *Escher wall* を含まないグラフのもつ5点以上の奇数点コードレスサイクル、もしくはその補グラフをなす点集合を *hyper-edge* とするクラッター(およびそのブロッカー)がidealであるための禁止マイナーは、 $J_n; C^2_{2n+1}; C^{n+1}_{2n+1}$ の3つの無限系列のみである。

という予想を提起している。本予想はいわゆるErdos-Posa propertyとの深い関連性に加え、ideal clutterの理論とperfect graphの理論を橋渡しする意味を併せ持つため、重要である。実際このクラッターは、グラフの持つ全ての極大な点部分理想グラフの構造を規定する。上記の2つの予想に現れるクラッターのクラス間に包含関係はない。本研究ではこれら2つの予想の解明を通じて、適切な部分予想の解決、あるいは両者を包含するより広いクラスの同定などを、研究のゴールに据える。

4. 研究成果

結局、2010年Jonathan WangによってIdeal Clutter Conjectureの反例が得られた。Minimally non-ideal clutterは当初の予想に反して非常に複雑であり、Wangの示したものの以外にも多くの無限系列が存在することが予想されている。こうした状況においては、Ideal clutter全体を研究することよりも、これまでに得られた多くの「重要なideal clutter」

を包含するような「[よい]クラス」を如何にして同定するかが、Ideality を研究する際の重要な問題意識になっていくはずである。そのような立場から、我々は、Conjecture1 の部分解決を与えた柏原氏との共著論文の結果を再検討し、より精密な証明と分析を与えた。この論文は、International Symposium on Combinatorial Optimization 2010 という組合せ最適化の主要な国際会議の会議論文として採択され、Invited Session での講演という形で実を結んだ。Conjecture2 に関連する取り組みについて: 「odd hole の recognition が多項式時間で判定可能なグラフのクラス」として、claw-free graph の族に着目することに思い至り、研究が進展した。claw-free graphs の内部構造については、ごく最近 Seymour & Chudnovsky らの decomposition theorem という非常に深い結果が得られたが、これらの結果を複合的に用いて、claw-free graphs の族についての odd hole clutter の特徴付けが得られることが確認できた。さらに、グラフ上の点素な偶サイクルのパッキングに関する未解決予想の肯定的解決と、グラフ上のいわゆる 15 パズル問題の一般化に成功し、それぞれ、平成 21 年に開催された格式ある国際会議 EuroComb 09 に採択され、高い評価を受けている。さらに、minimally non-perfect clutter の特別なクラスとして incidence matrix 表現が circulant になっているものがあるが、これらのクラスに関連する未解決予想である Girnstead's Conjecture について、その minimally non-ideal clutter についての対応物を発見し、その予想についての部分的な解決を得た。この結果は、平成 23 年に開催される、格式ある国際会議 EuroComb 11 に採択されている。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

Sakuma Tadashi, Shinohara Hidehiro, On circulant thin Lehman matrices, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Accepted, 査読有

Shinya Fujita, Tomoki Nakamigawa, Tadashi Sakuma, Colored Pebble Motion on Graphs, European Journal of Combinatorics, accepted, 査読有

Yusuke Higuchi, Atsushi Nakamoto, Kazuhiro Ota, Tadashi Sakuma, N-flips in even triangulations on the torus and Dehn twists preserving monodromies, Discrete Mathematics, 311(13), 1128—1135, (2011), 査読有

Kashiwaba Kenji, Sakuma Tadashi, The Positive circuits of oriented matroids with the packing property or idealness, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 36, 287—294, (2010), 査読有

Sakuma Tadashi, Shinohara Hidehiro, On circular thin Lehman matrices, 応用数学合同研究会報告集, 123—126, (2010), 査読無し

Shuya Chiba, Shinya Fujita, Ken-ichi Kawarabayashi, Tadashi Sakuma, Disjoint Even Cycles Packing, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 34, 113--119, (2009), 査読有

Shinya Fujita, Tomoki Nakamigawa, Tadashi Sakuma, Colored Pebble Motion on Graphs (Extended Abstract), Electronic Notes in Discrete Mathematics, 34, 113--119, (2009), 査読有

Shinya Fujita, Tomoki Nakamigawa, Tadashi Sakuma, Pebble Exchange on Graphs (Extended Abstract), 第26回代数的組合せ論シンポジウム報告集, 126—132, (2009), 査読無し

Masahiro HACHIMORI, Hiroshi KURATA, Tadashi SAKUMA, Determining the minimum rank of matroids whose basis graph is common,

Electronic Notes in Discrete Mathematics, 31, 137—142, (2008), 査読有

[学会発表](計8件)

Tadashi Sakuma, The positive circuits of oriented matroids with the packing property or idealness, ISCO Hammamet: International Symposium on Combinatorial Optimization, March 24-26, 2010, Yasmine Hammamet at El Medina Mediterranea.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

佐久間 雅 (SAKUMA TADASHI)

山形大学・地域教育文化学部・准教授

研究者番号：60323458