

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007年度～2010年度

課題番号：19540119

研究課題名(和文) 組合せ論における確率的及び擬確率的手法の研究とその応用

研究課題名(英文) Probabilistic and pseudo-probabilistic methods in combinatorics and their applications

研究代表者

石上 嘉康 (ISHIGAMI YOSHIYASU)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号：50262374

研究成果の概要(和文)：セメレディの一様性補題というグラフ理論の定理が、さまざまな組み合わせ論で有効であったことがすでに知られていたが、このセメレディの一様性補題をきれいな形で拡張した。従来の一様性補題は、複雑な手続きを何度も繰り返すことにより、所望の分割を得ていたが、非常に単純な確率的サンプルをたった一回とることによってほぼ常に実現されることが、この新しい拡張の利点である。この利点を生かし、いくつかの問題において応用し、有効性をしめした。

研究成果の概要(英文)：A theorem in graph theory called Szemerédi's regularity lemma is known to be useful in many combinatorial problems including additive number theory and others. This theorem has been expanded in a simple form. In previously known versions of this theorem, the constructions of the desired decompositions was obtained by repeating a complicated process. In this version, the desired decomposition is obtained almost surely by a one-time simple random sampling. By utilizing this advantage, this theorem is applied to several problems and its power is demonstrated.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1000000	300000	1300000
2008年度	900000	270000	1170000
2009年度	900000	270000	1170000
2010年度	700000	210000	910000
総計	3500000	1050000	4550000

研究分野：組合せ論

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：組合せ論、ラムゼー理論

## 1. 研究開始当初の背景

セメレディの一様性補題というグラフ理論の定理が、さまざまな組み合わせ論で有効であったことがすでに知られていたが、より強力で単純な形で存在しうることはまだ知られていなかった。

一様性補題のオリジナルの証明は、所望の分割を構成するために、もしも分割が所望の性質を満たさないならばある構造があることを示し、それを利用して(原理的には可能

だが、実際には実現が直ちには困難そうな) 手続きを何ステージも繰り返し、それと同時にあるインデックスに注目し、ステージが進むごとにインデックスが一定以上増量することを証明し、インデックスには上限があることから、有限回のステージ数で手続きが終了することを示した。一様性補題の拡張として、特にkグラフへの拡張としては、Rodlらや Gowersらによって、そして Tao によって行われたばかりであった。それらのどれもが

基本的に、この路線であって、どれも複雑な操作をかなり何回も繰り返すような重いものであった。実際、この手法の重さから、Gowers の当初の論文は本質的な誤りを含んでおり、誰にも発見されないうでいた。(後に発表された第二版の論文は証明の方針が全く異なる) よって、より単純な取扱いが効き、応用性のある一様性補題やその周辺技術が待たれた。それは実際に需要のある問題群に応用することによって、それら周辺技術も磨かれるべきものであった。

$k$  グラフとは、(通常の) グラフを一般化した概念であり、辺がちょうど 2 個の頂点を含むのではなく、ちょうど  $k$  個の頂点を含むような離散構造である。ここで  $k$  は 2 以上の自然数としている。なぜ  $k$  グラフへの拡張が重要な課題とされていたかという、 $k$  グラフへ一様性補題を拡張することにより、(加法的整数論の) セメレディの定理を系として生み出すことが知られていたかである。 $k$  グラフはそれ自体、重要な研究対象としても認識されていた。

## 2. 研究の目的

本研究では、組み合わせ理論における確率のおよび擬確率的方法論をグラフ理論のほかに、広い対象へ適用可能にする。この過程とともに、擬確率論という新しい理論の基礎を構築し、具体的な離散数学の問題を解く。組み合わせ論にありがちな個々の具体的な問題のみ個別に注目するのではなく、未来ある重要な道具や手法を極めることによって、数学および理論計算機科学などの応用分野に貢献することが本研究の目的である。

## 3. 研究の方法

組み合わせ論の内部はもちろんのこと、それだけで無く、関数解析、確率論、エルゴード理論、超準解析、理論計算機科学、整数論など、複数の手法が交錯する一連の問題群に注目し、より初等的で簡潔なアプローチを試みる。道具はそれ単体で強く美しいだけでは十分ではなく、重要で広い応用を持つことが重要であり、そのような応用を意識しながら道具を成長させていくことが肝要である。応用の無さそうな抽象化や一般化はむしろ避け、重要な応用問題を解きながら、もとの道具を磨いていく方法をとる。応用の無い部分は、その部分がどんなに美しくとも忘れられていくのが学問の常であるので、これが健全な方針であると信じる。

## 4. 研究成果

このセメレディの一様性補題をきれいな形で拡張した。従来の一様性補題は、複雑な手続きを何回も繰り返すことにより、所望の分割を得ていたが、非常に単純な確率的サン

ルをたった一回とることによってほぼ常に実現されることが、この新しい拡張の利点である。この利点を生かし、いくつかの問題において応用し、有効性をしめした。

セメレディの一様性補題の本来の目的であったセメレディの定理の、より強い形である Hales-Jewett の定理の密度版が、近年、組み合わせ論的に解かれた。それは興味深くより強くはあるが、複雑でもあるため、その手法の応用は難しく、本研究の手法の有効性は今後も失われまいだろう。

Frankl-Rodl は、セメレディの一様性定理の初期のバージョンの初期の応用として、グラフの任意の単調な性質に対して、その性質を満たす頂点数  $n$  のグラフの数は、トゥラン数というグラフの基本量によって、ほぼ決まってしまうということを証明した。単調という基本的な性質を満たすようないかなる性質でも成り立つという汎用性が大きい。(単調な性質とは、辺の除去について閉じた性質のことである。つまり、あるグラフ  $G$  が単調な性質  $P$  を満たすのであれば、その  $G$  からどのように辺を除去したグラフも  $P$  を満たす。) 組み合わせ論、特にグラフ理論はそれまでは特殊で個別的な性質を個別の手法で扱うことしかできなかった。理論計算機分野や組み合わせ論の分野において独立に研究されていた具体的な性質 (たとえば染色可能性) を結びつける定理である。グラフの数のオーダーでなく数の指数のオーダーであれば、これがほぼ決定できるということである。

この Frankl-Rodl の単調性に関する定理は、Alekseev や Bollobas-Thomason らによって、単調よりももっと強い性質である遺伝的という性質へ拡張させることに成功した。そして小早川らは、Frankl-Rodl の (グラフの亜種である) 3 グラフ版の一様性補題を使うことにより、遺伝的性質を満たす 3 グラフの数を近似的に評価した。

本研究では、これを一般の  $k$  グラフへと拡張した。これは、本研究計画の研究代表者による  $k$  グラフ版の一様性補題を応用することにより実現することに成功した。小早川らは 3 グラフ版一様性補題の手法としての重さについて論文中で不満を述べていたが、この  $k$  グラフ版はむしろ見通しが良く単純で軽いので、この点においても改善できた。この  $k$  グラフ版一様性補題の利点を活用することにより、効果的に、遺伝的性質を満たす  $k$  グラフの数の評価をすることができた。

さらに、普通のグラフや  $k$  グラフは、完全グラフなり完全  $k$  グラフの辺を黒白で塗り分けたものと考えられるが、さらに有限種類の色を用意して、これらの色で完全  $k$  グラフの辺を塗り分けた対象へと拡張することに成功した。これは、2色版が本質で、それにアイデアを追加することによって、有限色版へ

拡張したのではなく、むしろ、アイデアを抜いて純化することにより、より本質的な対象として、2色版ではなく、有限色版へと拡張したという点が大きい。

それまで、グラフ理論や超グラフ理論において、グラフの部分グラフとしては、辺誘導部分グラフと点誘導部分グラフの二種類があった。辺誘導部分グラフのほうが、比較的よりよく研究されているために、単に部分グラフといった場合には、辺誘導部分グラフのことを指す場合が多い。そして、この二つの部分グラフの問題は別のもので取り扱われ、同じ問題もまず辺誘導部分グラフについて解かれ、それを点誘導部分グラフへ移して解くということが行われた。前者と後者のどちらが強いという強弱関係は無い。一様性補題を用いて行われる問題群もそうであった。

しかしながら、研究代表者による枠組みでは、2色を有限色に拡張するだけでなく、その中に透明色という特別な色を導入することにより、辺誘導部分グラフと点誘導部分グラフを同時に取扱い、さらにより一般的なグラフに対して自然に拡張した。グラフを $k$ グラフへ、2色を有限色へ、辺誘導部分グラフと点誘導部分グラフを統合へという、高度に抽象化した対象が、実は、一様性補題にとって、より自然な対象であり、一様性補題の証明において、よりスムーズな流れで議論を展開することに成功した。

従来の組み合わせ論の研究では、グラフというものがあまりに伝統的な対象であるために、その対象にとらわれていたキライがあるが、すくなくとも一様性補題が有効であるような対象としては、グラフよりも透明色の入った有限色 $k$ グラフのほうがより自然な対象であることが分かった。特に、少数のエラーが混入しても大勢に影響が無い様な、ロバストな性質を扱う際に、効果的な威力を発揮する。

辺が一本局所的にあるか無いかによって、大域的な性質がガラリと変わるようなデリケートな問題には本質的に扱えないが、理論計算機科学をはじめとする応用分野においては、ロバストな性質は非常に重要な位置を満たす。たとえば、本研究代表者の $k$ グラフ版一様性補題の別の応用として、ある種の $k$ グラフの性質検査は、非常に効果的にできるという定理も、本研究代表者によって証明した。似た結果は Tao らによっても得られた。これまでの理論計算機科学においては、入力サイズ $N$ に対して、最悪計算時間を $N$ の関数としてあらわしたとき、それが $N$ の多項式より小さいかどうかという基準が、最も良く採用されていた。性質検査というのは、これよりもより単純かつ手軽なものであって、ある性質を満たすかどうか知りたい場合に、入力

された対象を隅々まで調べるのではなく、ランダムにサンプルを定数個とりだし、それを調べることで、入力対象全体に対して、判断を下そうというアルゴリズムである。当然、計算時間は定数時間という、極めて短い時間で終了する。サンプルをランダムに抽出する以上、誤った判断を下してしまう確率も0では無いが、かなり高い確率、たとえば99%、で正しい判断を下すというアルゴリズムである。この、たいへん好ましいアルゴリズムである性質検査が、超グラフという枠組みにおいて、かなり汎用的に有効であるということが示された。

これらの論文は Alon らをはじめいろいろな論文に引用された。また、これら研究代表者の結果を具体的には使っていないとしても、それまで極値(超)グラフ理論になかったランダムサンプリングという考えを活用することにより、いくつもの問題が説かれた。具体的な問題に挑戦する場合は、研究代表者の一様性補題を直接使うことが手軽ではあるが、一方で、より良い評価や、その問題に特化した短い証明を得ようとした場合、一様性補題を使った証明から、その問題に必要な部分のみを抜き去る(またはその問題固有の情報を利用して改造する)ことが行われる。つまり、研究代表者の得た定理を直接使うことなく、そのアイデアの本質のみを活用することによっても、いろいろな問題を解くことが可能である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

(1) Yoshiyasu ISHIGAMI, Linear Ramsey numbers for bounded-degree hypergraphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 査読有, 29, (2007), 47-51

[学会発表] (計4件)

(1) 石上嘉康, A simple construction for Szemerédi's regularity lemma, 純粋数学及び応用数学としての組合せ論・離散数学そしてその周辺ワークショップ, 2008年7月5日, 電気通信大学

(2) Yoshiyasu ISHIGAMI, A new look at Szemerédi's regularization, 114<sup>th</sup> Annual Meeting of AMS(American Mathematical Society), 2008年1月9日, San Diego Convention Center, USA

(3) 石上嘉康, Linear Ramsey numbers for bounded-degree hypergraphs, 日本数学会・応用数学科分科会, 2007年9月21日,

東北大学

(4) Yoshiyasu ISHIGAMI, Linear Ramsey numbers for bounded-degree hypergraphs, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Eurocomb 2007, 2007年9月13日, Seville university, Spain

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

プレプリントサーバー論文

(1) Yoshiyasu Ishigami. **A simple regularization of graphs.** math.CO arXiv:0904.4927

<http://front.math.ucdavis.edu/0904.4927>

(2) Yoshiyasu Ishigami. **The number of hypergraphs and colored Hypergraphs with hereditary properties.** math.CO. arXiv:0712.0425

<http://front.math.ucdavis.edu/0712.0425>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石上 嘉康 (ISHIGAMI YOSHIYASU)

研究者番号: 50262374

(2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3) 連携研究者

( )

研究者番号: