

平成22年5月19日現在

研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540121
 研究課題名（和文） 非一様媒体における非線形反応拡散系のフロント、パルスダイナミクの理論的解析
 研究課題名（英文） Mathematical analysis of front and pulse dynamics in heterogeneous diffusive media
 研究代表者
 池田 榮雄 (IKEDA HIDEO)
 富山大学・大学院理工学研究部（理学）・教授
 研究者番号：60115128

研究成果の概要（和文）：2成分反応拡散系において、拡散係数(2成分とも)にステップ状の空間非一様な摂動を与えたときの解のダイナミクスを、中心多様体理論を用いて有限次元の常微分方程式に縮約し、その縮約系を解析することにより、全体の解構造（安定定常解、不安定定常解、不安定周期解の存在、Hopf分岐、ホモクリニック分岐、分水嶺解の役割など）を決定し、非一様性の為に起こる進行波の通過、停止、反射のメカニズムを理論的に明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Two component reaction-diffusion systems with a bistable and odd symmetric nonlinearity are considered. We introduce a spatial heterogeneity, say a Heaviside-like abrupt change at the origin in the space, into diffusion coefficients. We reduce the PDE dynamics to finite-dimensional ODE systems on a center manifold and show the mathematical mechanism to produce the three types of responses (passage, stoppage, and reflection) in the PDE systems using finite-dimensional ODE systems. We succeed in calculating the reduced ODE systems exactly and explicitly.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：反応拡散系，中心多様体，ダイナミクス，非一様媒体，縮約方程式，特異摂動法，進行波解

1. 研究開始当初の背景

発展方程式の解としてのダイナミクスに関する問題（安定な解が多重に存在する時、どの解が選択されるかというパターン選択の問題や安定な解を分けている分水嶺解の

存在やその形状に関する問題、非一様な拡散場における解のダイナミクスに関する問題など）の研究は様々なパターンを形成していく途中の過程（遷移過程）の解明と密接に関係しており、応用上大変重要な問題である。

特に、多重特異点近傍における解のダイナミクスを調べることが中心課題となる(それは、これらの特異点が全体の組織中心(organizing center)の役割を果たしている)ので、その解析手法としては、中心多様体理論を適用し無限次元空間でのダイナミクスを中心多様体とよばれる有限次元上のダイナミクスに縮約することである。2002年に連携研究者の栄氏がある程度一般的な枠組みで縮約系を導出することに成功した。

その後、その理論の応用として非常に興味深い幾つかの結果が報告されているが、常微分方程式に縮約する時、重要な係数などは理論的には計算出来ず、数値計算の結果に頼っている。

これを計算するためには、特異点における解の周りでの線形化作用素の多重な(0固有値に対する)固有関数、共役線形化作用素の多重な固有関数を計算し、さらにそれらを含むある種の積分量を計算する必要がある。そしてこの量が常微分方程式系の係数となり、中心多様体上のダイナミクスを決定している。しかし、現状ではこれらを解析的にかつ、厳密に計算することは不可能であった。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、あるクラスの反応拡散系(反応項に区分的線形項を持つ系)に対して、特異摂動法(特異極限法)を用いて、線形化作用素の固有関数を全て構成的に計算し、さらに共役作用素の固有関数も全て構成的に計算し、それらの情報を用いて、中心多様体上の縮約常微分方程式の係数を解析的に求めることが最初の目的である。

(2) (1)の結果をもう少し一般的な非線形反応項、例えば、応用上よく利用されている3次関数(FitzHugh-Nagumo方程式系)にまで拡張すること、そしてその結果を利用し、フロント進行波同士、パルス進行波同士の相互作用を調べることが次の目的である。

(3) 最後に、空間的に非一様な拡散項を持つ反応拡散系に対して解のダイナミクスの特徴付けを行うことである。非一様な媒体における非線形反応拡散系の例は物理、化学、生物学、医学、工学などの様々な分野から提出されている。

一様な媒体における双安定な反応拡散系においては状態の遷移を表現するフロント進行波解、局在パターンを表現するパルス進行波解が重要なダイナミクスを決定しているが、どこかで一様性が変われば、その非一様性のタイプに依存してフロント進行波解がブロックされたり、速度を変えて通過したり、あるいは非一様性のために反射して逆方向に進行するなどの現象が数値計算結果から報告されている。パルスの場合でも同様で、停止、反射、消滅、分裂などの複雑

な現象が見つかっている。本研究では、代表的な幾つかの多重特異点の近傍で空間的非一様性が導入されたとき、フロントやパルスのダイナミクスに中心多様体理論を適用し、固有関数の特徴を利用して有限次元中心多様体上の精度の高い常微分方程式系に縮約し、それを解析することによって上記に挙げたフロント、パルスの様々なダイナミクスの全体像(関係)を明らかにする。

(4) さらなる応用として、周期的な媒体におけるフロント、パルスのダイナミクス(周期パルスの停止、反射、カオス的な挙動)も同様な手法で解析する。

3. 研究の方法

(1) 区分的に線形な反応項を持つ(一様媒体での)2成分双安定反応拡散系の空間1次元の問題に対して、フロント定常解、あるいはパルス定常解の周りでの線形化作用素が以下の2つの特異性をもつ場合を考える(定常解の存在に関しては既知である)。(1) 実部0の共役特異点(Hopf分岐)、(2) Jordan型の2重の0特異点。ある物理パラメータの値において、これらのケースが実際に起こることも確認済みである。

まず、解析的特異摂動法、あるいはSLEP(特異極限固有値問題)法を用いて、これらの特異点における線形化作用素の固有関数(Jordan型の時は一般化固有関数)を全て(多重度の数だけ)構成的に求める。次に、その共役作用素の固有関数も全て(多重度の数だけ)構成的に求める。

(2) 連携研究者の栄氏の提唱した中心多様体への縮約理論を適用して有限次元空間(中心多様体上)の常微分方程式系を導出する。この部分は栄氏が担当する。次に上で求めた各固有関数を利用して、縮約された微分方程式系の係数を正確に決定する。この部分が一番重要であり、係数の決定には膨大な計算を要するが、固有関数の具体的な表現がそれを可能にしている。

(3) 次に、拡散係数が非一様な摂動を受けた場合の各々の多重特異点近傍における解のダイナミクス(解の時間発展)を考える。つまり、非一様性の影響はどこに、どの様に現れるかを解明し、非一様な媒体における特異点近傍での解のダイナミクス(通過、停止、反射など)の全体像を明らかにする。理論的な証明を与えながら上記のそれぞれのステップを実施するが、確認のために、元の反応拡散系の数値計算を行い、その結果をアニメーションにして、縮約された常微分方程式系の解の挙動と比較する。

(4) (1)の結果をもう少し一般的な非線形反応項、例えば、応用上よく利用されている3次関数(FitzHugh-Nagumo方程式系)にまで拡張する。この場合は、固有関数は陽的な

形では表されないで、それらの積分値を計算する時は非線形反応項が3次関数である性質を上手く利用する。これらの結果を用いて、フロント同士、あるいはパルス同士の相互作用する縮約常微分方程式を導く。特に、多重特異点が(1)の場合には周期解が出現し、力学系のHopf分岐におけるnormal formを参考にして縮約を行うことになるが、この部分は周期構造のダイナミクスに関してエキスパートである連携研究者の小川氏が担当する。この縮約方程式としての常微分方程式系を解析することにより、それぞれの固有関数の複合モードが現れるか、それと同時に非一様性の影響はどこに、どの様に現れるかを説明し、非一様な媒体における特異点近傍での解のダイナミクス(通過、停止、反射など)の全体像を明らかにする。

(5) 更なる応用として、周期的な非一様媒体での解のダイナミクスを考察する。周期が長い時は上記で考察した結果がそのまま成り立つと予想されるが、周期を短くするとお互いの相互作用が新たに加わり、消滅、反射などの組み合わせがランダムに出現し、シルピンスキーガスケットのよう軌跡を描いたり、カオスの現象が現れることが数値計算の結果として報告されている。我々の縮約した常微分方程式系はかなり精度が高いので、これを使ってこれらの現象を確認し、その発生メカニズムを解析する。

4. 研究成果

(1) 一様媒体上で反応項に区分線形な奇対称性を持つ2成分双安定反応拡散系の空間1次元の問題に対して、フロント定常解の周りでの線形化作用素がJordan型(熊手型分岐)の特異性をもつ場合を考えた。解析的特異摂動法を用いて、この特異点における線形化作用素の固有関数(一般固有関数も含めて)を全て構成的に計算した。さらに、その共役作用素の固有関数も全て(一般固有関数も含めて)構成的に計算した。これらの情報を利用して、特異点近傍でのフロント解のダイナミクスを記述する縮約(常微分)方程式を導出し、この特異点において、2つの安定なフロント進行波解が分岐することを確認した。[雑誌論文⑪, 学会発表③, ⑫, ⑬, ⑭。]

(2) (1)の状況下で、拡散係数(2成分とも)にステップ状の空間非一様な摂動を与えたときのダイナミクスを数値計算より確認した。即ち、非一様性を徐々に強くしていくと、進行波は通過、反射、停止、反射の応答を示した。また、2つの反射においても違いがあることが分かった。このダイナミクスの変化を理論的に考察するために、中心多様体の理論を用いて、有限次元の常微分方程式系(縮約系)に縮約し、それを解析することによって、上記の偏微分方程式に対する数値計算結果

との綺麗な対応関係を明らかにした。具体的には、非一様性のために生じた安定定常解、不安定定常解、不安定周期解が重要な役割を果たし、不安定周期解がさらにホモクリニック分岐を起こすことによって、上記の異なった2つの反射が現れることを理論的に示した。これらの不安定解の安定多様体が非一様な摂動を受けた進行フロント解の通過、反射、停止、反射のセパレータ(分水嶺解)の役割を果たしていることを明らかにした。[雑誌論文③, ④, 学会発表⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨, ⑩, ⑪。]

(3) 一様媒体上で反応項に一般的な奇対称性を持つ2成分双安定反応拡散系の空間1次元の問題に対して、フロント定常解、あるいはパルス定常解の周りでの線形化作用素がJordan型(熊手型分岐)の特異性をもつ場合を考えた。解析的特異摂動法を用いて、この特異点における線形化作用素の固有関数(一般固有関数も含めて)を全て構成的に計算した。さらに、その共役作用素の固有関数も全て(一般固有関数も含めて)構成的に計算した。これらの情報を利用して、特異点近傍でのフロント解のダイナミクスを記述する縮約(常微分)方程式を導出し、この特異点において、2つの安定なフロント進行波解、あるいはパルス進行波解が分岐することを確認した。さらにこの結果を用いて、フロント進行波同士、あるいはパルス進行波同士の相互作用を記述する中心多様体上の縮約常微分方程式を計算し、それらの相互作用(お互いに引き合うか反発しあうか)を解析した。[雑誌論文⑦, ⑧, ⑫, 学会発表①, ②, ④。]

[雑誌論文⑦, ⑧, ⑫, 学会発表①, ②, ④。]

(4) 実部0の共役特異点(Hopf分岐)を持つ特異点近傍における解のダイナミクスを中心多様体上に縮約することによって、周期解を伴う解のダイナミクスを解析した。[雑誌論文②, ⑥, ⑩]

(5) 退化型、あるいは交差拡散を持つ反応拡散系に対して、その解を近似する統一的な半線形反応拡散系を提案し、その解析、数値解析への応用について研究を行った。[雑誌論文①, ⑤, ⑨。]

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

- ① 村川 秀樹, A relation between cross-diffusion and reaction-diffusion, DCDS Special, 査読有, 印刷中.
- ② 小川 知之, 奥田 孝志, Bifurcation analysis to Swift-Hohenberg equation with Steklov type boundary conditions,

- DCDS A, 査読有, Vol.25, 2009, 273-297.
- ③ 栄伸一郎, 松澤 寛, The motion of a transition layer for a bistable reaction diffusion equation with heterogeneous environment, DCDS A, 査読有, Vol.26, 2010, 901-921.
- ④ 池田榮雄, 栄伸一郎, Front dynamics in heterogeneous diffusive media, Physica D, 査読有, 印刷中.
- ⑤ 村川秀樹, A regularization of a reaction-diffusion system approximation to the two-phase Stefan problem, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 査読有, Vol.69, 2008, 3512 - 3524.
- ⑥ 桑村正隆, 中沢, 小川知之, A minimal model of prey-predator system with dormancy of predators and the paradox of enrichment, J. Math. Biol., 査読有, Vol.58, 2009, 459 - 479.
- ⑦ X. Chen, 栄伸一郎, 三村昌泰, SELF--MOTION OF CAMPHOR DISCS -MODEL AND ANALYSIS-, NETWORKS AND HETEROGENEOUS MEDIA, 査読有, Vol.4, 2009, 1-19.
- ⑧ 栄伸一郎, 池田榮雄, 池田幸太, 柳田英二, Eigenfunctions of the adjoint operator associated with a pulse solution of some reaction-diffusion systems, Bull. Inst. Math. Academia Sinica, 査読有, Vol.3, 2008, 603-666.
- ⑨ 村川秀樹, Reaction-diffusion system approximation to degenerate parabolic systems, Nonlinearity, 査読有, Vol.20, 2007, 2319-2332.
- ⑩ 小川知之, Degenerate Hopf Instability in Oscillatory Reaction-Diffusion Equations, DCDS Supplements, 査読有, 2007, Special vol.784-793.
- ⑪ 栄伸一郎, 池田榮雄, 川名健之, Dynamics of front solutions in a specific reaction-diffusion system in one dimension, Japan J. Indust. Appl. Math., 査読有, Vol.25, 2008, 117-147.
- ⑫ 池田榮雄, Dynamics of weakly interacting front and back waves in three-component systems, Toyama Math. J., 査読有, Vol.30, 2007, 1-34.
- [学会発表] (計 14 件)
- ① 池田榮雄, 非一様媒体上でのフロント進行波の散乱と分水嶺解について, 北陸応用解析研究集会 2010, 2010年2月13日, 金沢大学.
- ② 池田榮雄, 非一様媒体上のフロント進行波のダイナミクスについて, 応用数学合同研究集会, 2009年12月18日, 龍谷大学.
- ③ 池田榮雄, 二成分反応拡散系の進行波解-その構成法と安定性, 杜の学校 2009「パターン形成の数理」, 2009年11月13日-14日, 岩手大学.
- ④ 池田榮雄, 非一様拡散場におけるフロント波の散乱と分水嶺解, 「富山解析セミナー2009」, 2009年10月3日, 富山大学.
- ⑤ 池田榮雄, Dynamics of traveling front waves in bistable heterogeneous media, Equadiff 12, 2009年7月21日, Masarky University, Brno, Check Republic.
- ⑥ 池田榮雄, 双安定非一様拡散場におけるフロントダイナミクスについて, 北陸応用数理研究会 2009, 2009年2月14日, 金沢大学サテライトプラザ.
- ⑦ 池田榮雄, 非一様拡散と進行波のダイナミクス, 研究集会「富山解析セミナー2008」, 2008年10月4日, 富山大学.
- ⑧ 池田榮雄, 双安定非一様拡散場における進行波のダイナミクス, 日本数学会, 2008年度秋期総合分科会, 2008年9月27日, 東京工業大学.
- ⑨ 池田榮雄, 非一様拡散場における進行波のダイナミクス, 第18回日本数理生物学会大会 (企画シンポジウム), 2008年9月18日, 同志社大学.
- ⑩ 池田榮雄, Dynamics of front solutions in bistable heterogeneous diffusive media, Ryukoku Workshop 2008, Recent Progress on Pattern Formation and Dynamics in Mathematical Sciences, 2008年6月14日, 龍谷大学.
- ⑪ 池田榮雄, 反応拡散系における進行波の非一様性に対する応答について, 研究小集会「反応拡散系とその周辺」(京都駅前セミナー), 2007年12月11日, キャンパスプラザ京都.
- ⑫ 池田榮雄, 双安定非一様拡散場におけるフロント解のダイナミクス, 生物数学の理論とその応用, 2007年10月31日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑬ 池田榮雄, 双安定非一様拡散場におけるフロントダイナミクス, 研究集会「富山解析セミナー2007」, 2007年9月29日, 富山大学.
- ⑭ 池田榮雄, 特異摂動理論とその応用, 非線形数理・秋の学校「パターン形成の数理とその周辺」, 2007年9月26日, 明治大学・秋葉原サテライトキャンパス.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池田 榮雄 (IKEDA HIDEO)
富山大学・大学院理工学研究部・教授
研究者番号：60115128

(3) 連携研究者

栄 伸一郎 (EI SHIN-ICHIROU)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：30201362
小川 知之 (OGAWA TOMOYUKI)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授
研究者番号：80211811
村川 秀樹 (MURAKAWA HIDEKI)
富山大学・大学院理工学研究部・助教
研究者番号：40432116