

研究種目： 基盤研究(C)
 研究期間： 2007～2009
 課題番号： 19540123
 研究課題名（和文） 多様相論理とゲーム理論の融合的研究
 研究課題名（英文） Integrated study of multi-modal logics and game theory
 研究代表者
 鈴木 信行 (SUZUKI NOBU-YUKI)
 静岡大学・理学部・教授
 研究者番号： 60216421

研究成果の概要（和文）：ゲーム理論的な応用をめざして、直観主義的認識命題論理 IGEF を導入した。（本来 EF は添え字だが、簡単の為こう表記する。）さらに、IGEF のためにクリプキ-タイプ意味論を与えた。IGEF で重要な特徴は2つある。第1は、直観主義論理をベース論理として採用した点である。直観主義論理は構成的推論の論理であり、これはゲームの構成的実行可能性の分析に有用である。第2は、浅い深さの個人間認識推論の取り扱いである。これは epistemic structure の概念を用いて制御される。

研究成果の概要（英文）： We introduce intuitionistic epistemic propositional logics IGEF for game-theoretical applications, and give the Kripke-type semantics for IGEF. The IGEF has two important features. The first one is the adaptation of intuitionistic logic as its base logic. The intuitionistic logic is the logic of constructive reasoning, and is related to constructive playability of a game. The second one is the treatment of shallow interpersonal epistemic inferences. These are controlled by the concept of epistemic structures.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
19年度	600,000	180,000	780,000
20年度	800,000	240,000	1,040,000
21年度	1,500,000	450,000	1,950,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系化学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学基礎論・様相論理・ゲーム理論

1. 研究開始当初の背景

全体構想は、多様相論理(multi-modal logic)とゲーム理論(game theory)の分野間を超えた融合的研究である。多様相論理は、数理論理学のみならず、計算機科学・社会科学等の

応用においても重要である。ゲーム理論もまた、理論経済学・社会科学全般や・計算機科学などの広汎な分野に影響を与えている。

数理論理学の1つの重要な対象に数学的推論がある。ゲーム理論で議論される意思決定

の過程も、数学的推論の1つとである。この点で2つの分野は重要な交差点を持ち、ここから学際領域として研究が深まってきた。

ゲーム理論の方面からは、R. J. Aumann (2005年ノーベル経済学賞)による研究があり、これは数理論理学の立場から眺めると、「様相論理 S5 のクリプキ意味論+主観確率理論」とみなせる。そこで、多様相論理・認識論理の研究者が興味をもち始め、ゲーム理論の側からもこれに答える形で学際的な国際会議がいくつも開催された。また理論経済学の国際ジャーナル *Economic Theory* 誌に *Logic and Economics* 特集号が編まれた。

この流れの中で、研究代表者と金子守(連携研究者)は精力的に共同研究を行ってきた。最終年次の2009年には、国際会議 LGS(Logic, Game Theory and Social Choice)の第6回が日本で開催予定であった。この点から研究を進める絶好のチャンスであった。

2. 研究の目的

上述の動きをふまえ、数理論理学のゲーム理論への一方的応用を超えて、ゲーム理論の概念を援用しての多様相論理の数学的理論の新展開を目指した。そして、ゲーム理論本来の目的への多様相論理の応用をねらった。

3. 研究の方法

- (1) ゲーム理論における意思決定過程の具体例を、意味論的な道具を用いて解析することである。これにより、限定合理性の認識論理的側面が明瞭になることがみこまれる。
- (2) 限定合理性概念による証明論的要素を抽出する。さらにバックグラウンドとなるクリプキ意味論の再構成を考察する。

これらは、国内・外の論理学研究者・ゲーム理論研究者とディスカッションを行うなかで遂行された。特に国際会議・国際ワークショップの参加による国外の研究者とのディスカッションが有益であった。

4. 研究成果

(1) 直観主義的認識命題論理 IGEF の導入
認識論理(epistemic logic)とは、信念・知識を様相作用素(modal operator)として取り入れた様相論理である。複数の人間の信念・知識を取り扱うときには、複数種類の作用素を用意することとなり、この様な認識論理を多様相認識論理(multi-modal epistemic logic)と呼ぶ。これらの研究は、哲学や計算機科学を含む様々な分野と関連しながら発展をしてきている。一方、複数の人間(プレイヤー)が、互いに相手の考えを読みながら、自己の最善戦略を導き出し、意志決定する過程の分析は、ゲーム理論に於ける重要な研究課題であり、同時に認識論理的推論の格

好の例となる。認識論理学とゲーム理論は独立に同じターゲットを考察の対象としていえる。こうした視点に立てば、論理学とゲーム理論の両分野を、融合的に発展させ得る領域が開けている。こうしたアプローチが、近年成果を上げてきている。この研究プロジェクトのなかで、ゲーム理論に於ける意志決定過程の分析を目的として、直観主義的認識論理 IGEF を導入した。この体系の主な特徴とその Kripke 型意味論の要点を紹介する。特に、古典論理上ではなく、直観主義上に認識論理を構築する点は、ゲームの実行可能性(playability)に関連する重要な特徴である。

例として、次の様な利得行列で与えられる2人ゲーム(Large store vs. Small store)を考える。

		$s_{2,1}$	$s_{2,2}$
$s_{1,1}$	600	0	2
$s_{1,2}$	300	10	-1

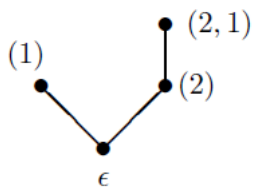
ふたりのプレイヤーが、それぞれふたつの選択肢(戦略) s_{11} , s_{12} と s_{21} , s_{22} をもつ。(直観的には、プレイヤー1を大規模商店と考え、プレイヤー2を小さな店と考えると状況を想像しやすい。)プレイヤー1は、プレイヤー2の行動は無視しているが、その行動はプレイヤー2の利得に影響を与えるものと見る。プレイヤー2の意思決定過程を、2つの意思決定基準(decision criteria)の場合に考察してみる。

Max-Min: s_{21} がプレイヤー2のMax-Min戦略となっている。即ち、 s_{21} の与える最悪の値(Min)は0、 s_{22} は-1なので、相手の戦略がどちらであっても、 s_{21} を選んだ方が最悪を最大化(Maximize)できる。これを導くには、相手の信念を考慮する必要がない。従って、この意思決定基準を用いる場合には、相手の信念に関わる推論(認識論的推論 epistemic inference)をする必要がまったくない。

予測+最善: プレイヤー1の信念(s_{11} がよりよい利得)を推論し、それに対する最善戦略 s_{22} を取ることにより、意志決定が出来る。従って、この場合の意思決定過程には、認識論的推論をする必要が生じる。しかし、ごく浅い認識論的推論である点に注意する。特に、共通知(common knowledge)が必要ないことが重要な点である。

こうした状況を考察するため、epistemic structure という概念を用意する。様相作

用素として信念作用素 (belief operator) B_1, B_2, \dots, B_n を使う。ここで、添字の $1, 2, \dots, n$ はゲームのプレイヤーを意図しており、 $B_i(A)$ は、「プレイヤー i は A を信じている」という言明を表す。信念作用素の nesting の仕方 (入れ子具合) $B_{i_1} \dots B_{i_n}$ に対して有限列 (i_1, \dots, i_n) を対応させて表現し、これを epistemic status と称する。epistemic status の動く範囲を決める集合を epistemic structure と呼ぶ。これを制御することで、認識論的推論を制御できる。例えば、意思決定基準「Max-Min」の場合、 $F_1 = \{\epsilon, (1), (2)\}$ で意思決定過程が記述できるが、「予測 + 最善」の場合、 $F_2 = \{\epsilon, (1), (2), (1, 2)\}$ が必要である (ϵ は空列)。それぞれが、自然に tree の構造を持つことが重要である。F2 を以下に図示する。



IGEF の添字 E と F は、epistemic structures である。IGEF を設計する際の基本的アイデアは、認識論的推論と非認識論的推論とを分離し、認識論的推論を F で制御することである (i. e., 分割統治)。ここで、本研究で導入した IGEF では、我々がなぜ直観主義論理をベースとして採用するのかを先程の例に即して説明する。次の様な (oracular: 奇妙な) 意思決定基準を考える。

Oracular Decision: プレイヤー1 が s11 を選ぶならば、それに対する最善戦略を取る。プレイヤー1 が s11 を選ばないならば、Max-Min による選択を取る。

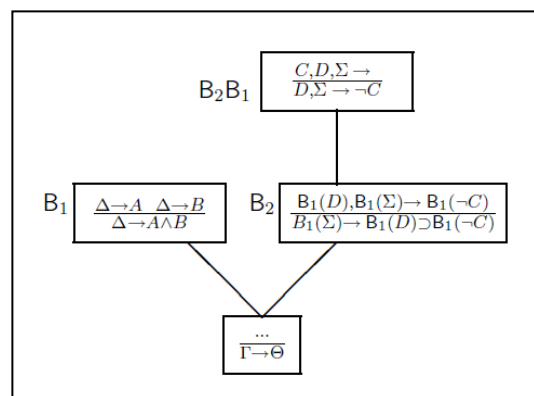
この意思決定基準は、古典論理ベースで見ると、意思決定を導いてしまう。A を命題「プレイヤー1 が s11 を選ぶ」とすると、プレイヤー2 は、古典論理上で次の様に推論できる。

- A ならば、それに対する最善戦略を取る。よって、私の選択は存在する。
- A でないならば、Max-Min を取る。よって、私の選択は存在する。
- よって、(A であっても not A であっても、) 私の選択は存在する。

しかし、この結論「私の選択の存在」は、プレイヤー2 の具体的な選択 (s21 か s22 か?) を導かないことは明らかである。この推論で

は、「選択の存在」は「ゲームの実行可能性 (playability)」を導かないのである。その意味で、古典論理では、ゲーム論的状況の分析には強すぎる場合がある。この推論が「具体的な選択」を導かない大きな要因は、排中律 (A or not A) である。よく知られているように、古典論理から排中律を取り除いた直観主義論理は、構成的推論に対応すると考えられている。こうした観点から、プレイヤーの合理的意思決定過程を分析するという目的のためには、ベースは構成的論理としての直観主義論理の方が適している。構成的論理上では、「選択の存在」は「具体的な選択の存在」を意味し、「ゲームの実行可能性」が導かれる。実際、Oracular Decision を用いた場合は、IGEF では意思決定に対応する論理式が証明不可能であることが示される。

統語論的には IGEF は Gentzen 流の sequent calculus として導入され、上記の epistemic status を利用した thought-sequent を扱う体系として整備した。この thought-sequent の導入により、上述のアイデアは極めてすっきりと表現される。ベースとして直観主義論理の Gentzen 流体系 LJ を使い、認識的でない (non-epistemic) 推論は thought-sequent の認識的でない部分において LJ を引き継ぎ、認識的 (epistemic) 推論は、Gentzen 流の KD を引き継いでいる形になっている。そして、それらが上手く棲み分けられる構造になっている。詳細は、極めて技術的になるので、ここでは省略するが、重要な特徴として、形式的証明の概形が F の構造を引き継いでいることがある。ここに $F = F_2$ のときの模式図を掲げておく。



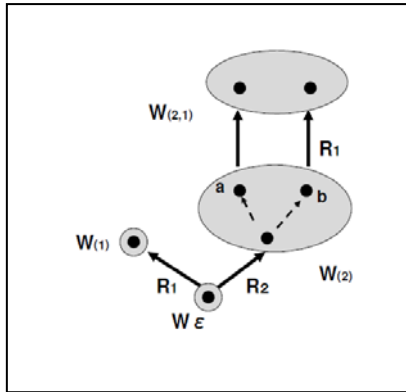
(2) IGEF の Kripke 型意味論

直観主義的認識論理 IGEF の Kripke 型意味論を構築し、その完全性を示した。基本的アイデアは、次の3点である

① Γ プレイヤー間の認識関係 (epistemic relations) は、様相論理の Kripke 意味論で記述する。

- ②_r 各プレイヤーのころ(mind) 内の非認識的部分は、直観主義論理の Kripke 意味論で記述する。よって、直観主義的 Kripke モデルの族(family) の形になる。
- ③_r 直観主義的 Kripke モデルは、F の形を「概略図」として配置される。

詳細は極めて技術的にな定義の羅列になるので、ここでは省略する。F = F2 のときの例を図示する。灰色の楕円は、破線の矢印を半順序とする直観主義的 Kripke モデルであり、全体の概形は F2 になっている。



そして、次の諸定理が成立する。

定理 1 (完全性)

IGEF は、この意味論に関して完全である。

定理 2 (弱い有限モデル性)

F が有限であれば、IGEF は有限モデル性を持つ。

定理 3 (決定可能性)

直観主義的認識命題論理 IGEF は、決定可能である。

この意味論を使って、上述の Oracular Decision を用いた場合は、IGEF では意思決定に対応する論理式が証明不可能であることが示される。さらに、いくつかのゲーム理論への応用を議論することもできる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Suzuki, Nobu-Yuki, Kripke-Type Semantics for Intuitionistic Epistemic Logics of Shallow Depths for Game Theory, 査読有り, Proceedings of the Sixth International Workshop of Logic and Engineering of Natural Language Semantics, 201-220 (2009)

- ② Suzuki, Nobu-Yuki and M. Kaneko, Contentwise Complexity: An Evaluation of Arrow's Impossibility Theorem, 査読無し, Proceedings of the 42nd MLG meeting at Fukuoka, Japan 2008, (2008), pp. 41-42.
- ③ 鈴木信行, ある直観主義的認識論理とその Kripke 型意味論, 査読無し, Proceedings of the 42nd MLG meeting at Fukuoka, Japan 2008, (2008), pp. 43-46.

[学会発表] (計 13 件)

- ①_r N.-Y. Suzuki, Kripke-Type Semantics for Intuitionistic Epistemic Logics of Shallow Depths for Game Theory, Logic and Engineering of Natural Language Semantics 6 (LENLS VI), 2009 年 11 月 20 日, Tokyo, Japan
- ②_r N.-Y. Suzuki, Semantics for intuitionistic epistemic logics of shallow depths for game theory, Logic, Game theory, and Social Choice 6, 2009 年 8 月 27 日, Tsukuba, Japan
- ③_r N.-Y. Suzuki, Semantics for intuitionistic epistemic logics of shallow depths for game theory, SAET Conference on Current Trends in Economics 2009, 2009 年 7 月 4 日, Ischia, Italy
- ④_r 鈴木信行, ある直観主義的認識論理とその Kripke 型意味論, 42nd MLG 数理論理学研究集会 2008, 2008 年 11 月 8 日, 九州産業大学
- ⑤_r 金子守、鈴木信行, Contentwise Complexity: An evaluation of Arrow's impossibility theorem, 42nd MLG 数理論理学研究集会 2008, 2008 年 11 月 8 日, 九州産業大学
- ⑥_r 鈴木信行, ある直観主義的認識論理とその意味論, 日本数学会 秋季総合分科会 (数学基礎論分科会), 2008 年 9 月 26 日 東京工業大学 東京・日本
- ⑦_r M. Kaneko and N.-Y. Suzuki, A Proof-Theoretic Evaluation of Arrow's Impossibility Theorem, Logic and Economics (Players with Limited Cognitive and Inferential Abilities and Mental-Behavioral Consequences), 2008 年 8 月 27 日, Tsukuba, Japan
- ⑧_r N.-Y. Suzuki, Semantics for Intuitionistic Epistemic Logics of Shallow Depths for Game Theory, Logic and Economics (Players with Limited Cognitive and Inferential Abilities and Mental-Behavioral Consequences), 2008 年 8 月 26 日, Tsukuba, Japan

- ⑨ M. Kaneko and N.-Y. Suzuki, A Proof-Theoretic Evaluation of Arrow's Impossibility Theorem, 9th International Meeting of the Society for Social Choice and Welfare, 2008年6月21日 Concordia University, Montreal, Canada
- ⑩ N.-Y. Suzuki, Semantics of Epistemic Logics for Constructive and Shallow Epistemic Inferences, (招待参加) 2007 Joint Conference in Game Theory and Decentralization, 2007年10月21日 Taipei, Taiwan
- ⑪ N.-Y. Suzuki, Some Logical Aspects in Game Theoretical Situations: Constructive and Shallow Epistemic Inferences --Intuitionistic Epistemic Logic--, Workshop on Epistemic Logic and Game Theory, 2007年8月19日 Taipei, Taiwan
- ⑫ N.-Y. Suzuki, Intuitionistic Epistemic Logics of Shallow Depths for Game Theoretical Applications: completeness and Decidability, 5th International Conference on Logic, Game Theory and Social Choice 2007, 2007年6月22日 Bilbao, Spain
- ⑬ N.-Y. Suzuki, Intuitionistic Epistemic Logics of Shallow Depths: Possible-State-of-Mind Semantics, 8th SAET Conference on Current Trends in Economics 2007, 2007年6月19日 Kos, Greece

[図書] (計1件)

- ① 金子守、勁草書房、「社会正義 地界で考える」、2007年、304ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 信行 (SUZUKI NOBU-YUKI)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号：60216421

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

金子 守 (MAMORU KANEKO)
筑波大学・大学院システム情報科学研究科・教授
研究者番号：40114061