

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540124

研究課題名（和文） 確率微分方程式の数値解における擬似乱数生成と安定性の解明

研究課題名（英文） Pseudo-random number generation and stability in numerical solution of stochastic differential equations

研究代表者

三井 斌友

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号：50027380

研究成果の概要：本研究では、数学定数であり超越数でもある円周率 π の数値表現を、擬似乱数生成に用いる提起を行い、その実現のため数値的な検証を行った。 π の超多数桁10進表現を適宜な桁数ごと区切ったのち規格化し、 $[0, 1]$ 区間に分布する一様乱数とみなしたとき、他の生成法と比較して統計的優劣があるかどうかを検定した。この結果、 π を用いる方法は他の方法と比較して決して劣ることはなく、むしろいくつかの優位性が見られることを示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数値解析

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：数値解析，確率微分方程式，擬似乱数生成，円周率，統計的検定，一様乱数，数値的安定性

1. 研究開始当初の背景

確率微分方程式 (SDE) $dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t)$ の初期値問題は、確率の変動を含む様々な現象の数理モデルとして広範に応用されている。決定論的な微分方程式と比べてもずっと複雑なこのモデルの解析やシミュレーションには、コンピュータを活用した数値的手法、すなわち数値解法が不可欠

である。SDE の解である確率過程 $X(t)$ に対して、独立変数 t を離散化し、その離散点 (ステップ点) に沿う離散確率過程の何らかの意味の近似を構成する原理で作られる離散変数解法がもっとも考えやすく、また適用範囲が広い。Euler-丸山スキームはその初歩であり、典型でもある。ここではステップ幅に応ずる標準 Wiener 過程の増分が必要であ

り、これを平均 0, 分散 1 の一様正規乱数 $N(0, 1)$ に ステップ幅の平方根を乗ずることで実現し、こうすれば Euler-丸山スキームは実行可能となる。

このような離散変数解法には少なくとも 3つの課題、すなわち収束性(convergency), 安定性(stability), 実現可能性(implementability) が提起される。特に安定性は離散変数解法の信頼性に関わる性質であり、SDE の真の解のもつ漸近的な性質(なんらかの意味の漸近安定など)が離散変数解においても再現できるかを問うものである。安定性のないスキームの与える近似は信頼を欠くといわなければならない。数値的な誤差の可能性も込めて、初期値問題に加えられた摂動が時間発展とともにどのように変動するか(望むべくは減少し、0 に収束してほしい)を解析するという立場で、線型安定性解析がまず行われる。それでも、SDE の場合は様々な解析的安定性概念があるのに対応して、数値的安定性の概念と解析手法がいくつか提案されてきた。

また、実現可能性は特に SDE の場合問題となる。一様正規乱数 $N(0, 1)$ と一口に言っても、その実現、特にコンピュータ上の実現はそのままでは不可能である。コンピュータが生成できる「乱数」は所詮有限個しかなく、「正しい乱数(genuine random numbers)」とはなりえない。それにできるだけ「近い」擬似乱数(pseudo-random numbers)を使って、離散変数解を作り出しているが、この乖離がどれだけ影響するかはまだあまり解析が進んでいなかった。ことに、SDE の数値解では一様正規乱数列を大量に消費し、また高次スキームではしばしば標準 Wiener 過程の増分の他に、それとは理論的に独立であるべき確率過程の増分を必要とするので、課題は一層深刻であった。

本研究計画では、実現可能性は他の課題と密接に関連しているという、決定論的な微分方程式の場合と大きく異なる点を特に強調し、この関連の解明を目指した。

2. 研究の目的

本研究では、Wiener 過程の増分の数値的実現に即して安定性を論じることを目的とした。研究代表者と分担者が提起してきた、数値スキームの T 安定性では、増分の数値的実現と安定性が関連することが示唆されていたので、次の諸点の解明を目指した。

(1) 二点あるいは三点確率変数のような簡単な離散分布の場合は、取り扱いが容易であるが、もっと多数のときや、あるいはほとんど連続分布とみなせる場合は、どう適用するか。

(2) 確率的 Runge-Kutta スキームや、あるいは線型多段階スキームのなかで見られる、

確率的増分を複数用いる離散変数法に T 安定性をどう拡張するか。

(3) SDE による大規模シミュレーションで必要となる離散変数解法の並列化では、T 安定性はどう拡張され、どのような指針を与えるか。

(4) T 安定性が明らかとなった段階で、逆にその結果に沿って良い性質をもつ増分の実現法を考察できないか。

(5) 離散変数解法の並列化、その実現のための擬似乱数生成の並列化と安定性の解明。

擬似乱数生成法でよく用いられる線型合同法(linear congruential method)は、実は並列化することで著しく性能が損なわれることが知られている。一方、軌道(trajjectory, sample-path)ごとに近似解を構成する離散変数解法は並列計算向きとみなされ、その実行は比較的容易である。この矛盾した要請にこたえるため、並列化に優れた新たな擬似乱数生成法を求めるとともに、その性能を T 安定性の観点から解析し、指針を確立することもめざす。

3. 研究の方法

離散変数解法に必要な擬似乱数生成の並列化については、従来とは異なったアプローチが必要と考え、円周率 π の計算を活用する方法を探求することとした。周知のように、 π は超越数であり、これを数値表現したときには、まだ証明はされていないが、その数値の出現は一様乱数の性質をもつと信じられている。これをより正確に判定するため、NIST の乱数検査基準とモンテカルロ法による検査の両面で、これを検定する。さらに、 π 計算は超長大桁計算を必要とし、擬似乱数として活用するには膨大な計算資源と計算時間を要するという大きな壁があり、この克服のため D.H. Bailey et al. による BBP algorithm の活用もはかる。

さらに、これらの擬似乱数生成と数値的安定性との関係を、数値解析の立場で解析する。

4. 研究成果

(1) 新しい擬似乱数生成法に関する研究

すでに知られている π の超多数桁 10 進表現を使い、それを適宜な桁数ごと区切ったのち規格化し、 $[0, 1]$ 区間に分布する一様乱数とみなしたとき、他の生成法と比較して統計的優劣があるかどうかを検定した。検定方法としては米国 NIST が提唱している組織的な方法とともに、擬似乱数生成が確率微分方程式の数値解に使うことを意図しているのを考慮し、モンテカルロ数値積分によっても検定した。

この結果、 π を用いる方法は他の方法と比較して決して劣ることはなく、むしろいくつかの優位性が見られることを示した。この結

果は同志社大学理工学研究報告第 49 卷 (2008) に公表した. π による擬似乱数生成の並列化による高速化は, 上記の BBP アルゴリズム (16 進の桁ごとにほぼ独立に計算できるアルゴリズム) の活用が目標となり, まだ進行中である.

(2) T 安定性と擬似乱数との関係に関する研究

擬似乱数の分布関数を数学的に確定できれば, T 安定性の定式化のなかに取り込むことができることは, 見通しがつき, この成果に関する論文を準備している. また確率微分方程式の数値的安定性の更なる進展に関しては, 中国・北京の G.-Da Hu と Q. Zhu と共同研究を行い, 制御工学の観点も導入した研究で成果を得て, 現在学術論文を投稿中である.

(3) 微分方程式の数値解析に関する研究

微分方程式の離散変数解法の安定性の研究は, 当然確率微分方程式の場合にも generic な影響をもっている. こうした観点で推進した研究になかでは, 中国・上海の J.-X. Kuang, H.-J. Tian との共同研究があり, 中立型遅延微分方程式 (neutral delay differential equations) の線型安定性解析において特性方程式の根判別に関する新しい結果を導き, この基準を数値安定性解析にも応用した成果を収めた. この結果は J. Comput. Appl. Math., 第 223 巻 (2009) に掲載された. この他, 数値解析特に微分方程式の離散変数解法の安定性解析を推進し, 口頭および論文発表を行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

(1) Jiaoxun Kuang, Hongjiong Tian and T. Mitsui, Asymptotic and numerical stability of systems of neutral differential equations with many delays, J. Comput. Appl. Math., **223** (2009), 614-625 (refereed).

(2) T. Mitsui, The number π as a pseudo-random number generator, 同志社大学理工学研究報告, **49** (2008), 160-168 (査読無).

(3) 満田 賢一郎, 三井 斌友, 鈴木 千里, 小藤 俊幸, 遅延積分微分方程式に対する一般化線形多段階法の安定性について, 日本応用数学会論文誌, **18** (2008), 199-216 (査読有).

(4) 中村 真輔, 三井 斌友, 大規模常微分方程式系の台形則に対する BiCGSTAB 法 ---

Krylov 部分空間の再利用による高速化の試み ---, 日本応用数学会論文誌, **17** (2007), 219-238 (査読有).

(5) T. Mitsui and Y. Saito, MS-stability analysis for numerical solutions of stochastic differential equations --- Beyond single-step single dim ---, in "Some Topics in Industrial and Applied Mathematics" (ed. by R. Jeltsch, T.-T. Li and I. Sloan), World Scientific Publishing, Singapore, 2007 (ISBN 978-7-04-021903), pp.181-194 (refereed)

[学会発表] (計 8 件)

(1) 堀之内成明・三井斌友, Schwarz 法の収束に対する内部ソルバーの影響, 日本応用数学会 2008 年度年会, 2008.9, 東京大学柏キャンパス.

(2) 江崎信行・三井斌友・小藤俊幸, 芝草の成長過程の数理モデル化, 日本応用数学会 2008 年度年会, 2008.9, 東京大学柏キャンパス.

(3) 江崎信行・三井斌友・小藤俊幸, 芝草の生育に対する数値計算モデルの適用, 日本数理生物学会大会, 2008.9, 同志社大学今出川校地.

(4) 三井斌友, Convergence and stability of LALMM, 「常微分方程式の数値解法とその周辺」研究集会, 秋田県立大学本荘キャンパス, 2008.2.

(5) T. Mitsui, 'Look-ahead' linear multistep methods, Third EASIAM Conference, Xiamen University, China, 2007.11.

(6) 江崎信行・三井斌友, 共有メモリ型並列計算機向けの微分方程式の数値解法とデュアルコア PC での性能評価, 日本応用数学会 2007 年度年会, 2007.9, 北海道大学工学部.

(7) T. Mitsui, K. Mitsuda, T. Koto and C. Suzuki, Generalized linear multistep methods for delay integro-differential equations, 2007 International Conference on Scientific Computation and Differential Equations (SciCADE07), Saint-Malo, France, 2007.7.

(8) 三井斌友, 「先読み」線型多段階法, 第 36 回数値解析シンポジウム, 2007.6, 神奈川県湯河原町.

[その他]

(1) 三井斌友, 数値解析の散歩道: これからを見通す, 応用数理, 第 18 巻第 4 号, 74 - 76, 2008.12.

(2) 三井斌友, 数値解析の散歩道: わが国の数値解析の歩み, 応用数理, 第 18 巻第 3 号, 52 - 54, 2008.9.

(3) 三井斌友, 数值解析の散歩道 : 60年を経た「来し方」, 応用数理, 第18巻第2号, 79 -- 81, 2008.6.

(4) 三井斌友, 数值解析の散歩道 : 数值解析は死んだか?, 応用数理, 第18巻第1号, 56 -- 59, 2008.3.

(5) M. Embree and T. Mitsui, ``The golden age of numerical analysis has not yet started!'' --- Report of the Round Table Discussion in ICIAM07, SIAM News, 40-8 (Oct 2007), p.8-9.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三井 斌友

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号 : 50027380

(2) 研究分担者

齊藤 善弘 (2007年度)

岐阜聖徳学園大学・経済情報学部・准教授

研究者番号 : 30249213