

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2008

課題番号：19540127

研究課題名 (和文) 実数の集合論とその応用

研究課題名 (英文) Set Theory of the Reals and its Applications

研究代表者

ブレンドル ヤーグ (BRENDLE JÖRG)

神戸大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：70301851

研究成果の概要：独立性証明というのは、数学的な命題が数学の標準的な公理系のもとでは証明できないことを示すための論法のことである。独立性証明を行う際の主要な集合論的な技法である強制法を用いることによって、実数の集合論、組合せ論的集合論、記述集合論や、一般位相幾何学などの様々な数学の分野における問題に関するいくつかの無矛盾性の結果を証明した。

交付額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 2007年度 | 1,500,000 | 450,000 | 1,950,000 |
| 2008年度 | 2,600,000 | 780,000 | 3,380,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 4,100,000 | 1,230,000 | 5,330,000 |

研究分野：集合論

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：数学基礎論, 集合論, トポロジー, 測度論, 強制法, 組合せ論的集合論, 記述集合論

1. 研究開始当初の背景

コーエンが強制法を発明した後、集合論は急速に発展し、実数の構造についての多数の命題が集合論の公理系 *ZFC* から独立であることが示された。また、独立性証明を行う際に有用な技術である強制法の反復法も開発された。近年は、Shelah の *template* に沿った反復法という新しい技法 (*Two cardinal invariants of the continuum* ($\mathfrak{d} < \mathfrak{a}$) and *FS linearly ordered iterated forcing*, *Acta Math.* 192 (2004), 187-223) などの, *ccc* 強制法の有限台反復法及び *proper* 強制法の

可算台反復法という古典的な方法と異なる反復強制法についての水準の高い研究が進展している。また、既知の実数を付け加える強制法やその反復法のさらに詳細な分析が行われている。本研究 (特に、研究成果 (1) と (6)) と方法論的に密接に関連しているフィルターに対応する *Laver* 強制法に関して、研究代表者によって多くの結果が得られている (*Van Douwen's diagram for dense sets of rationals*, *Ann. Pure Appl. Logic* 143 (2006), 54-69)。

2. 研究の目的

この研究の目的は、連続体とその部分集合の構造を取り扱う「実数の集合論」を組合せ論的集合論や記述集合論の観点から調べることであった。特に、強制法の最新の技術を用いることによって、「実数の集合論」に焦点を絞りつつ、その一般位相幾何学、群論等の数学の他分野への応用についても研究を行うことを目指した。例えば、下記の具体的なテーマについて研究することが本研究計画の目的であった。

(1) **Malyhin の問題**。バーコフと角谷の古典的な定理により、「全ての第一可算位相群は距離づけ可能である」ことが知られているが、この命題で仮定されている第一可算性をどの程度まで弱めることができるかという問いは自然で重要な問題となる。第一可算性より弱い性質のうち、フレッシュ性は主要な役割を果たしている。距離づけ可能でない非可算なフレッシュ群の存在は知られているが、「全ての可算なフレッシュ群が距離づけ可能であることは無矛盾であるか？」という Malyhin の問題が未解決のまま残されている (研究成果 (1) を参照)。

(2) **射影的階層における可測性**。実数を付け加える多数の強制法 P は、ボレル集合族を実数上のある σ -イデアル I で割った商 $Borel/I$ として表現できる (Zapletal, *Descriptive set theory and definable forcing*, Mem. Amer. Math. Soc. 167 (2004), no. 793)。 P -可測性は、ルベーク可測性やベールの性質のように、 I に対して導入された可測性の概念である。 $\Sigma 11$ 集合は P -可測であるが、構成可能性公理のもとで P -可測でない $\Delta 12$ 集合は存在する。従って、 $\Delta 12 P$ -可測性及び $\Sigma 12 P$ -可測性を構成可能集合のクラス上の超越命題として特徴づけることは一般的かつ重要な問題である (研究成果 (3) を参照)。

3. 研究の方法

本研究では、無矛盾性証明を行う際だけでなく、 ZFC の結果を得るためにも、ジェネリック実数を間接的に用いるなどで、最新の強制法の様々な手法を用いた。例えば、Shelah の template に沿った反復法 (研究成果 (2) を参照)、フィルターに対応する Laver 強制法 (研究成果 (1) と (6) を参照) 及び Mathias 強制法 (研究成果 (5) を参照) の有限台反復法、Hechler 強制法の有限台反復法 (研究成果 (3) を参照) などの方法論とし

て重要な技術を用いた。また、 $\Delta 12 E$ -ベールの性質が $\Sigma 12$ ルベーク可測性から導かれること (研究成果 (3) を参照) を証明するため、まず $\Sigma 12$ ルベーク可測性が localization 強制法のジェネリックの存在と同値であること、次に後者が eventually different reals 強制法のジェネリックの存在を導くこと、最後に後者が $\Delta 12 E$ -ベールの性質と同値であることを示した。このように、強制法を用いて ZFC の結果を証明した。

実数の集合論に関する組合せ論的集合論や記述集合論については世界的に研究が行われているため、海外の研究者との意見交換や討論、特に共同研究は必要不可欠であった。研究成果の多くは、Michael Hrušák、Yi Zhang、Benedikt Löwe や Jana Flašková らとのディスカッションや共同研究により得られた。また、研究代表者は研究集会及び国際会議に招待された際、様々な研究者と意見交換を行った。さらに、研究集会及び国際会議を開催した。

(1) 下記の長期間の研究打合せを実施した。

① 2007年9月3日~21日: 中山大学(広州、中国)。Yi Zhang との意見交換。Mad families を中心に研究を行った (研究成果 (2) を参照)。

② 2007年11月19日~12月12日: Michael Hrušák は神戸大学を訪問した。下記の研究成果 (1) を完成し、研究成果 (4) に着手した。

③ 2008年3月1日~3月29日: Benedikt Löwe は神戸大学を訪問した。下記の研究成果 (3) を得た。

④ 2008年8月20日~9月12日: Jana Flašková は神戸大学を訪問した。下記の研究成果 (5) に着手した。

⑤ 2009年1月26日~2月23日: Universidad Nacional / Universidad de los Andes (ボゴタ、コロンビア) と Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (カラカス、ベネズエラ)。Andrés Villaveces, Ramiro de la Vega、Maria Losada と Carlos DiPrisco との意見交換。また、実数の集合論をテーマにしたミニコース「Forcing and the structure of the real line」を行った。

(2) 代表者は下記の海外での国際会議及び研究集会へ招待され、様々な研究者と意見交換や議論を行った。

① 2007年6月1日~7日: 国際会議「Leonhard Euler and modern combinatorics」。サンクト・ペテルブルグ(ロシア)。

② 2007年11月9日~10日: 研究集会「Conference in honour of the 60th

birthday of Professor Andreas R. Blass」。トロント (カナダ)。

③ 2008 年 1 月 13 日～19 日：研究集会「Mengenlehre」。オーバーウォルフアッハ (ドイツ)。

④ 2008 年 6 月 9 日～19 日：国際会議「Advances in Set-Theoretic Topology. Conference in Honour of Tsugunori Nogura on his 60th Birthday」。エリチェ (イタリア)。

⑤ 2008 年 9 月 22 日～26 日：研究集会「The 10th Luminy Workshop in Set Theory」。マルセーユ (フランス)。

(3) 本研究者は下記の国際会議及び研究集会を開催した。

① 2008 年 3 月 19 日～21 日：研究集会「Set Theory Meeting in Kobe」を神戸大学にて開催し、Benedikt Löwe にミニコースを行ってもらった。

② 2008 年 8 月 25 日～29 日：研究集会「組合せ論的集合論と記述集合論」を京都大学数理解析研究所にて開催し、Simon Thomas (Rutgers University, 米国) と Menachem Kojman (Ben Gurion University, イスラエル) にミニコースを行ってもらった。

③ 2008 年 9 月 1 日～6 日：神戸大学で開催された国際会議「10th Asian Logic Conference」でプログラム委員を務めた。

④ 2009 年 3 月 5 日～6 日：研究集会「第 8 回の関西集合論セミナー」を神戸大学にて開催した。

4. 研究成果

連続体とその部分集合の構造を組合せ論的集合論や記述集合論の観点から調べた。特に、強制法の理論の最新の技術を用いることによって、実数直線の組合せ論的構造を表現する基数不変量、自然数上の極大フィルター、射影的階層の低いレベルにおける可測性、特異基数上の maximal almost disjoint families や、可算なフレッシュ群などに焦点を絞って研究を行った。主な研究成果は下記通りである。

(1) **Malyhin の問題** (位相群)。自然数の有限部分集合全体は、対称差を演算としてグループ群になる。この群 G について考える。自然数全体上のフィルター F に対して、 G 上の位相 $\tau(F)$ が自然に定義されるが、この $\tau(F)$ が距離づけ可能であることは、 F が可算生成であることと同値になる。また、いくつかの ZFC から独立な公理のもとで、 $\tau(F)$ がフレッシュとなるような非可算生成のフィ

ルター F が存在し、Malyhin の問題の反例を与える。研究代表者は Michael Hrušák (Universidad Autónoma Nacional de México, Morelia, メキシコ) との共同研究で、「全ての ω_1 生成のフィルター F に対して、 $\tau(F)$ がフレッシュでない」という命題の無矛盾性を証明し、Malyhin の問題を部分的に解決した (雑誌論文①を参照)。この矛盾性を証明するため、フィルターをうまく選び、それに対する Laver 強制法を finite support で反復するという手法を用いた。

(2) **特異基数上の mad families**。無限基数 κ の部分集合からなる族 A が almost disjoint であるとは、全ての A の元の濃度が κ で、どのふたつの A の元の共通部分も濃度が κ より小さくなることをいう。また、包含関係に関して極大な almost disjoint な集合族を maximal almost disjoint family (または mad family) と呼ぶ。 κ の共終数以上の濃度を持つ、 κ 上の mad family の最小濃度は almost disjointness number と呼ばれ、 $\mathfrak{a}(\kappa)$ で表される。このとき、 $\mathfrak{a}(\kappa) \leq \mathfrak{a}(\text{cf}(\kappa))$ が明らかに成り立つ。本研究では、可測基数の存在の無矛盾性のもとで、可算共終数の特異基数 κ に対して、 $\mathfrak{a}(\kappa) < \mathfrak{a}(\omega)$ が無矛盾であることを示した。この証明においては、 κ 上の mad family を付加する ccc 強制法を新たに構成し、さらにそれを template に沿った反復強制法に埋め込むという洗練された手法を用いた。Mad families on singular cardinals (in preparation) として出版される予定である。

(3) **射影的階層における可測性**。Benedikt Löwe (Institute for Logic, Language and Computation, Amsterdam, オランダ) との共同研究で、実数を付け加える古典的な ccc 強制法のひとつである eventually different reals 強制法 E に対応するベール空間上のトポロジー $\tau(E)$ のベールの性質を調べた。 $\tau(E)$ は標準トポロジーより強い。「全ての $\Sigma 12$ 集合が E -ベールの性質をもつ」と「全ての実数 x に対して、 ω_1 が $L[x]$ において到達不可能である」というふたつの命題が同値であることを示した。さらに、「全ての $\Delta 12$ 集合が E -ベールの性質をもつ」という命題が $\Sigma 12$ ルベーク可測性から導かれ、古典的な $\Delta 12$ ベールの性質を導くことも証明した。この他、Hechler のモデルを使うことによって、「古典的な $\Sigma 12$ ベールの性質が成り立つが、 $\Delta 12$ E -ベールの性質が成り立たない」ことの無矛盾性なども得ている。これを示すために、Hechler 強制法の組合せ論的性質を詳細に調べており、dominating な実数以外の eventually different な実数が付加されないことを証明した。Eventually

different functions and inaccessible cardinals (preprint) として出版される予定である。

(4) **Cichoń の図式の有界なバージョン。** Michael Hrušák との共同研究で、ベール空間上の eventually bounding 順序とそれに関連する基数不変量 (unbounding number と dominating number) を用いずに、零集合イデアルと瘦集合イデアルに関連する基数不変量の組合せ論的特徴づけをその有界なバージョンと置き替えることで、Cichoń の図式への新しいアプローチを発展させた。

(5) **極大フィルターの存在とジェネリック存在。** 自然数全体 N 上の極大フィルターのクラスがジェネリックに存在するとは、連続体の濃度より真に小さい全てのフィルター基がそのクラスに属する極大フィルターへ拡張できることをいう。また、 I を自然数 N 上の稠密なイデアルとするとき、 N 上の自由極大フィルター U が I -極大フィルターであるとは、任意の関数 $f:N \rightarrow N$ に対して、その f 像が I に属するような U の元が存在することをいう。Jana Flašková (University of West Bohemia, Plzeň, チェコ) との共同研究では、 I が密度ゼロイデアルまたは総和可能イデアルの場合について、 I -極大フィルターの存在とジェネリック存在を調べた。特に、密度ゼロ極大フィルターのジェネリック存在を特徴づける基数不変量の下界と上界を発見した。 *Generic existence of density zero ultrafilters* (in preparation) として出版される予定である。

(6) **解析的な商構造に関連する基数不変量。** 解析的なイデアルや F_σ -イデアルなど、定義可能なイデアル I で $P(N)$ を割った商構造 $P(N)/I$ は近年活発に研究されている。この研究は Farah の重要な業績 (*Analytic Quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers*, Mem. Amer. Math. Soc. 148 (2000), no. 702) によって注目を集めた。上記のような $P(N)/I$ の多くは、 $P(N)$ を有限部分集合で割った $P(N)/fin$ とよく似た構造を持つ。例えば、 F_σ -イデアル I に対して、 $P(N)/I$ は強制法として実数を付け加えない σ -閉構造となり、自然数上の極大フィルターを付加する。つまり、強制法に関して $P(N)/fin$ と同様な性質をもち、 CH のもとで $P(N)/fin$ と同形である。本研究では、総和可能イデアル I について、 $P(N)/fin$ と $P(N)/I$ の構造の比較に着手した。特に、それぞれの構造に対してある基数不変量の値が異なるようなモデルを構成することによって、 $P(N)/fin$ と $P(N)/I$ が同形でないことの無矛盾性を示した。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① Jörg Brendle, Michael Hrušák, *Countable Fréchet Boolean groups: an independence result*, The Journal of Symbolic Logic, to appear. 査読あり
- ② Jörg Brendle, Paul Larson, Stevo Todorčević, *Rectangular axioms, perfect set properties, and decomposition*, Bulletin, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences mathématiques, Académie Serbe des Sciences et Arts, Beograd, **33** (2008), 91-130. 査読あり
- ③ Jörg Brendle, *Mad families and ultrafilters*, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, **49** (2007), 19-35. 査読あり
- ④ Jörg Brendle, Sakae Fuchino, *Coloring ordinals by reals*, Fundamenta Mathematicae, **196** (2007), 151-195. 査読あり
- ⑤ Jörg Brendle, *Distinguishing groupwise density numbers*, Monatshefte für Mathematik, **152** (2007), 207-215. 査読あり
- ⑥ Jörg Brendle and Greg Piper, *MAD families with strong combinatorial properties*, Fundamenta Mathematicae, **193** (2007), 7-21. 査読あり
- ⑦ Jörg Brendle, *Independence for distributivity numbers*, in: Algebra, Logic, Set Theory. Festschrift für Ulrich Felgner zum 65. Geburtstag (B. Löwe, ed.), Studies in Logic (College Publications), vol. **4** (2007), 63-84. 査読あり

[学会発表] (計 7 件)

- ① Jörg Brendle, *Mad families on uncountable cardinals*, Jornadas colombo-venezolanas de teoría de conjuntos, 2009年2月6日, Bogotá, コロンビア
- ② Jörg Brendle, *Recent results on mad families*, Advances in Set-theoretic Topology, Conference in Honour of Tsugunori Nogura on his 60th Birthday, 2008年6月10日, Erice, イタリア
- ③ Jörg Brendle, *Mad families on singular cardinals*, Set Theory Meeting in Kobe, 2008年3月21日, 神戸, 日本

- ④ Jörg Brendle, *MAD families on singular cardinals*, Mengenlehre-Tagung, 2008年1月14日, Oberwolfach, ドイツ
- ⑤ Jörg Brendle, *Malyhin's Problem*, International Conference on Topology and its Applications, 2007年12月4日, 京都, 日本
- ⑥ Jörg Brendle, *Distinguishing groupwise density numbers*, Conference in honour of the 60th birthday of Professor Andreas R. Blass, 2007年11月10日, Toronto, カナダ
- ⑦ Jörg Brendle, *What are cardinal invariants of the continuum*, Euler and modern combinatorics, 2007年6月6日, St. Petersburg, ロシア

[その他]

国際会議及び研究集会のホームページ：

- ① 研究集会「Set Theory Meeting in Kobe」(神戸大学、2008年3月19日～21日)：
<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~brendle/other-meetings/kobe-march2008.html>
- ② 研究集会「組合せ論的集合論と記述集合論」(京都大学、2008年8月25日～29日)：
<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~brendle/ri.ms2008/j-home.html>
- ③ 国際会議「10th Asian Logic Conference」(神戸大学、2008年9月1日～6日)：
<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/ALC10/>
- ④ 研究集会「第8回の関西集合論セミナー」(神戸大学、2009年3月5日～6日)：
<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~brendle/other-meetings/kobe-march2009.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

ブレンドル ヤーグ (BRENDLE JÖRG)
神戸大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号：70301851

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者