様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年３月３１日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００７～２００９
課題番号：１９５４０１２８
研究課題名（和文）時間遅れをもつ微分方程式系から導かれるローラン多項式環上の行列方程式に関する研究
研究課題名（英文）Study on matrix equations over a Laurent polynomial ring obtained from differential equations with a time-delay

研究代表者
伊藤　直治（Ito Naoharu）
奈良教育大学・教育学部・教授
研究者番号：９０２４６６６１

研究成果の概要（和文）：本研究では，　時間遅れをもつ線形微分方程式系から導かれるローラン多項式環について調べ，この環上の行列方程式の解の存在条件と解を計算する方法を検討した．この結果は，元の時間遅れをもつ線形微分方程式系の定性的性質を解析するための１つの手段を与えると考えられる．また，ある種の自己相反行列多項式行列の特性値の分布などについて調べた．

研究成果の概要（英文）：In this research, a Laurent polynomial ring obtained from differential equations with a time-delay is investigated. Then, the existence conditions and computation methods of solutions for matrix equations over the ring are studied. We can apply these results to the investigation of qualitative properties of the differential equations with a time-delay. Moreover, the distribution of zeros of a self-reciprocal polynomial is also studied.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	500,000	150,000	650,000
２００８年度	400,000	120,000	520,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
総　計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：応用数学
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：ローラン多項式環，時間遅れ，線形微分方程式系，行列方程式，自己相反行列多項式

１．研究開始当初の背景

代数リャプノフ方程式および代数リッカチ方程式のような行列方程式は，工学における基礎的な方程式として広く研究されてきた．代数リャプノフ方程式は様々なシステムの解析において，代数リッカチ方程式はシステムに対する制御系の設計において，共に非常

に有用であることが知られている．このことは，線形常微分方程式系の定性的性質をこれらの行列方程式に基づいて解析することができるという数学的事実に基づいている．一方，工学だけでなく，数物系科学，生物学，化学，情報科学などの分野の様々な問題が，時間遅れをもつ微分方程式系による数学モデルによって捉えられ，その解の挙動，安定性，大域的な構造などを調べることが重要な課題となっている．したがって，時間遅れをもつ微分方程式系についても，対応する行列方程式に基づいて定性的性質の解析が行えれば，応用上有用な結果が得られることが期待できる．

時間遅れをもつ微分方程式系の定性的理論に関連した行列方程式の研究としては，無限次元行列方程式に関する研究や2-D 行列方程式（特に，2-D リッカチ方程式）に関する研究などがある．前者は，時間遅れをもつ微分方程式を関数微分方程式として関数解析的手法を用いたものであり，後者は，一般化された Roessor 型状態ベクトル微分差分方程式として多次元システムの理論を用いたものである．どちらも理論的に有用な成果を導いている．しかし，現実の問題へ応用することを考えた場合，無限次元行列方程式の取り扱いは難しく，その解法も複雑なものとなる．また，2-D リッカチ方程式を解くことは，無限次元リッカチ方程式を解くよりも容易である反面，2-D リッカチ方程式の重み行列を，2-D リッカチ方程式を分割して得られる 1-D の離散時間および連続時間のリッカチ方程式の解に基づいて，ある条件を満たすように試行錯誤的に修正しなければならない．そこで，本研究では時間遅れをもつ線形微分方程式系の解析にローラン多項式環上の行列方程式を用いるという新たな視点からアプローチを行う．ローラン多項式環上の行列方程式を調べることは，従来の実数体上の行列方程式に関する理論の一般化として興味ある課題でもあるということは言うまでもないが，研究代表者の知る限り欧米においてわずかに研究発表されている程度で，十分な成果は得られていない．特に，国内外を問わず数学的な立場からの研究が遅れており，体系的な理論の構築が望まれるところである．

研究代表者は，主に可換環上の線形システム理論に関する研究に従事し，得られた成果を時間遅れをもつシステムに応用してきたが，平成 8 年度から平成 10 年度まで日本学術振興会日独科学協力事業として「行列 Riccati 方程式と有理行列の分解」に関する共同研究を行う機会を得た．この際，共同研究者の一人でリッカチ方程式に関する研究の第一人者である Wimmer 教授（Universitaet Wuerzburg, Germany）と共に，非標準リッカチ方程式に関する研究を行い，行列リッカチ方程式に係わる様々な研究手法を学んだ．非標準リッカチ方程式の研究では，安定化解の存在条件，半正定および正定な安定化解の存在条件や双対リッカチ方程式との関係などに関する成果を得た．この共同研究から，多項式環上の行列方程式と時間遅れをもつ線形微分方程式系の安定化問題との関連を研究するという着想に至った．

２．研究の目的

本研究の目的は，以下の通りである．

(1) 時間遅れをもつ微分方程式系から導かれるローラン多項式環の性質を調る．
(2) このローラン多項式環上の行列方程式，特に代数リャプノフ方程式と代数リッカチ方程式について調べる．
(3) ある種の自己相反行列多項式の特性値の分布について調べる．

また, 上記(1)と(2)の結果を時間遅れをもつ線形微分方程式系に応用することも検討する．さらに，上記(3)の結果を連立差分方程式に応用することも考える．

３．研究の方法

工学の多くの分野において，実数（または複素数）を係数にもつ行列方程式の理論は，非常に多くの応用をもつため，盛んに研究が行なわれてきた．特に，代数リャプノフ方程式および代数リッカチ方程式は，システム制御工学の分野で重要な役割を果たしてきたため，この分野で独特の発展をしてきた方程式である．このことは，これらの行列方程式の解の存在条件などが，システム制御工学における基礎的な概念であるところの可制御性，可観測性，さらには可安定性，可検出性と密接に結びついていることから，むしろ自然なことであるといえる．このような実数を係数にもつ行列方程式の理論は，通常の常微分方程式系で表される数学モデルをもつようなシステムに応用されてきた．一方，多くの理学・工学の分野では，近年，通常の常微分方程式系では表現しきれないシステムを取り扱う必要性が増してきている．そのような状況のなかで，時間遅れをもつ微分方程式系は，対象となるシステムの数学モデルを適切に表現するものの一つとして，その重要性が認識されてきている．時間遅れをもつ常微分方程式は，関数微分方程式として，関数解析的な手法を用いて議論されることが多い．この

場合，対応する行列方程式は無限次元の方程式となり，数学的な取り扱いと共にその解法も複雑となる．

本研究では，時間遅れをもつ線形常微分方程式系の定性的な性質を，ローラン多項式環上の行列方程式に基づいて解析を行うことを念頭におき，そのために必要となる時間遅れをもつ線形常微分方程式系から導かれるローラン多項式環の性質を考察し，さらにそのローラン多項式環上の行列方程式を調べるという点に特色がある．

ローラン多項式環上の行列方程式を調べることは，従来の実数体上の行列方程式に関する理論の一般化として興味ある課題であることは言うまでもない．それだけに留まらず，この理論が確立すれば，工学的に非常に多くの応用を生み出す可能性があると考えられる．特に，時間遅れをもつ微分方程式系の定性的理論との関係から，制御工学などの分野における制御系設計法に新しい手法が加えられることが期待できる．さらに，時間遅れをもつ線形微分方程式系の定性的性質の解析に，計算機代数的手法を用いることが可能になると考えられ，このことの意義は決して小さくないと思われる．

また，研究代表者は，環上の行列方程式について，ドイツ・ヴュルツブルク大学数学科の H. Wimmer 教授と意見交換をしている過程で，ある種の自己相反行列多項式の特性値について調べるという着想を得ている．

この研究については，まず，K. Chinen,（An abundance of polynomials satisfying the Riemann, hypothesis, Discrete Math. 308 (2008), 6426--6440.）の結果を行列方程式の場合に一般化することを考える．さらに，K. Chinen の結果と J. Schur（Uber Potenzreihen, die im Innern de Einheitskreises beschankt sind, J. reine u, angewandte Mathematik 147 (1917), 205-232）の結果との関連を考察し，Chinen の多項式の零点の分布について，より詳細な結果が得られないかを検討する．

４．研究成果

実有理関数を係数にもつローラン多項式に対し，ある変換を施すと複素数上の整関数になるような多項式は時間遅れをもつ線形微分方程式を表す微分差分作用素と考えることができる．このようなローラン多項式の全体のなす環はベズー整域となることが分かるが，このローラン多項式環上の行列は，ユークリッド整域上の行列のようにスミス形をもつことも示すことができる．

このローラン多項式環に正定性および半正定性の概念を導入し，この環上の代数リャプノフ方程式について調べた．まず，一般的な方法でローラン多項式環に正定性の概念を導入し，代数リャプノフ方程式の正定解などについて考察した．また，代数リッカチ方程式との関係についても調べ，時間遅れをもつ線形微分方程式系の安定性とその微分方程式系が定めるローラン多項式環上の代数リッカチ方程式の正定解との関係を考えた．

これらの成果が得られたが，一方で，議論が若干一般的になりすぎてしまい，時間遅れを持つ線形微分方程式系にもっと適切に対応させるためには，引き続き考察をする必要がある．特に，H. Gluesing-Luerssen（Linear Delay-Differential Systems with Commensurate Delays: An Algebraic Approach, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2002）の結果との関連を調べることが必要であると思われる．

また，ある種の自己相反行列多項式の特性値について調べた．これは，H. Wimmer 教授(ドイツ・ヴュルツブルク大学数学科)と R. Kustner 氏(ドイツ・ヴュルツブルク大学数学科)との共同研究となった．研究代表者は環上の行列方程式について，Wimmer 教授と意見交換をしていたが，その過程で本研究の着想に至った．

複素係数の行列多項式 $P(x)$ を考える．$P(x)$ に対して，

$$Q(x) = z^m P^*(x^{-1})$$

として，

$$F(x) = P(x) + Q(x)$$

と定義する．この行列多項式がある条件を満たすと，その特性値に対応する単因子の次数が 1 となることが分かった．この成果は，Enestroem-Kakeya の定理と関係があり，K. Chinen,（An abundance of polynomials satisfying the Riemann, hypothesis, Discrete Math. 308 (2008), 6426--6440.）の結果のある種の一般化となっている．

この行列多項式に関する結果を得るために，J. Schur（Uber Potenzreihen, die im Innern de Einheitskreises beschankt sind, J. reine u，angewandte Mathematik 147（1917),

205-232）の結果の一部を拡張する問題を考えた．$a_0 \neq 0$，$a_k \neq 0$とし，

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$$
$$= c(x - w_1)\cdots(x - w_k)$$

と定義する．$r \geq 0$，$|s| = 1$とする．

$$q(x) = s x^r p^*(x)$$

とし，

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

と定義すると，$f(x)$は自己相反多項式となる．このとき，$p(x)$の零点$w_1, \cdots, w_k$が満たす条件によって，$f(x)$の零点が単根になることなどが分かった．これは, K. Chinen,（An abundance of polynomials satisfying the Riemann, hypothesis, Discrete Math. 308 (2008), 6426--6440.）の結果を含む一般化となっている．

このような，ある種の自己相反行列多項式に関する成果は，Wimmer 教授(ドイツ・ヴュルツブルク大学数学科)および R. Kustner 氏(ドイツ・ヴュルツブルク大学数学科)との共著学術論文としてまとめることとなった．

自己相反行列多項式に関する研究は，今後もさらに発展させていくことができると思われる．

平成 22 年 2 月 9 日に奈良教育大学において研究集会「システムと制御の数理」を主催した．本研究集会には，数学と工学という異分野の研究者が集まった．講演者と講演題目は以下の通りである．

(1) 講演者：軸屋一郎（名古屋大学・航空宇宙工学専攻）
講演題目：On Kalman canonical decomposition of lnear periodic continuous-time systems with real coefficients

(2) 講演者：牛田俊（大阪工業大学・機械工学科）
講演題目：Time-delay and fluctuation on biomimetic visual servoing

(3) 講演者：Harald Wimmer（ドイツ・ヴュルツブルク大学・数学科）
講演題目：Spectraloid matrix polynomials with positive semidecinite coefficients and an extension of Enestroem-Kakeya theorem

研究代表者との共同研究のために来日していた Wimmer 教授(ドイツ・ヴュルツブルク大学数学科)にこの研究集会に参加いただけたことの効果は大きく，新たな研究交流がこの集会を契機として開始された．

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕
なし

〔学会発表〕
なし

〔図書〕
なし

〔その他〕
Naoharu Ito, Reinhold Kustner, Harald Wimmer, A class of self-inversive matrix polynomials with characteristic roots on the unit circle, in preparation.

６．研究組織
(1)研究代表者
伊藤　直治（Ito Naoharu）
奈良教育大学・教育学部・教授
研究者番号：９０２４６６６１

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし