

平成22年 4月 5 日現在

研究種目:基盤研究(C)

研究期間: 2007 ~ 2009

課題番号:19540134

研究課題名(和文) セレクターを許容する高次元エルデシー型空間の構成と超空間の位相構造の研究

研究課題名(英文) Construction of higher dimensional Erdős-type spaces with selectors and study of topological structure of hyperspaces

研究代表者

野倉 嗣紀(NOGURA TSUGUNORI)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号:00036419

研究成果の概要(和文): 帰納的次元が2になるセレクターを許容するエルデシー型空間の構成に成功した。更に、任意の自然数 n に対して、弱セレクターを許容する被覆次元、小帰納的次元共に n であるエルデシー距離空間を構成した。また、特異セレクターにより、空間が totally disconnected, 小帰納的次元が0、大帰納的次元が0の場合を特徴付けることができた。

研究成果の概要(英文): We have constructed an Erdős-type space whose inductive dimension is 2 and admits continuous selections. Also we have constructed a metrizable Erdős space whose covering dimension and small inductive dimension is n for any natural number n and admits a continuous weak selections. We have succeeded to characterize spaces by using set-maximal selections in the following cases: totally disconnected, 0 small inductive dimension and 0 large inductive dimension.

交付決定額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野: 数物系科学

科研費の分科・細目: 数学・数学一般

キーワード: 順序空間、連続選択関数、超空間、次元

1. 研究開始当初の背景

連続選択関数(セレクター)を許容する空間は弱順序づけ可能か否かの問題に関連し、当時知られていた連続選択関数を許容する空間は全て1次元以下であり、高次元の空間の存在を解明することが求められていた。

2. 研究の目的

- (1) セレクターの存在と次元との関連を明らかにすること。
- (2) セレクターを許容する空間及び超空間の位相構造の解明

3. 研究の方法

- (1) 愛媛大学内で定期的にゼミを開催し共同研究を進めた。
- (2) 海外共同研究者とは日常的に電子メールで意見交換を行った。
- (3) 海外共同研究者と年1回相互に訪問し、共同研究を実施した。

4. 研究成果

(1) 弱連続選択関数(弱セクター)を許容する totally disconnected、可分な完備距離空間で被覆次元、小帰納的次元、大帰納的次元が共に n (n は自然数または無限) である空間の構成: totally disconnected, 可分な完備距離空間で各種次元が n である空間の存在は良く知られているが、そのような空間に開かつ閉な部分集合全体をベースとした位相を導入すれば零次元、可分な距離空間となり、カントール集合に埋め込める。従って、自然な順序が導入され、その順序に関し、弱セクターを持つことがわかる。実際、弱セクターより更に強く、コンパクト集合全体からなる超空間の部分空間が連続なセクターを許容することが示される。

(2) 連続選択関数(セクター)を許容する被覆次元が n (n は自然数または無限)、totally disconnected、弱順序付け可能な空間の構成: κ を連続濃度以上の正則な基数とする。このとき $\kappa \times I(n)$ ($I(n)$ は単位閉区間の n 個の積) の部分空間で、 κ への射影が $1:1$ になる適当な部分空間を選ぶことにより、被覆次元が n となる空間を構成することができる。このような空間が弱順序付け可能であること、従って連続なセクターを許容することは、射影が $1:1$ であることから導かれる。

(3) 連続選択関数を許容する空間で可算 π ベースを持つ小帰納的次元がゼロでない空間の構成: このような空間が存在するか否かは Open Problems in Topology II (Edited by E. Pearl, 2006) 問題390で提出され、この問題に対する反例を構成したものである。空間が可算 π ベース B を持つとは B は空でない開かつ閉集合の可算個の集まりであり、任意の空でない開集合に B の元が含まれることとする。 κ を連続濃度以上の正則な基数とする。このとき $(\kappa+1) \times I(n)$ ($I(n)$ は単位閉区間の n 個の積) の部分空間で、 $\kappa+1$ への射影が $1:1$ になる適当な部分空間を選ぶことにより被覆次元が n 小帰納的次元が 1 である空間が得られる。

(4) 正規な点極大空間で被覆次元が零でない

空間の構成: この問題は Gutev Nogura, Set maximal selections, Topology Appl. 157 2010 で提出されたものであり、連続体仮説を仮定して反例を構成した。 c を連続濃度とし、このとき $(c+1) \times I$ (I は単位閉区間) の部分空間で、 c への射影が $1:1$ になる適当な部分空間を選ぶことにより被覆次元が n 小帰納的次元が 1 である正規空間が得られる。連続体仮説は空間が正規であることを保証するために用いられる。

(5) 連続選択関数(セクター)を許容する小帰納的次元が2以上になる空間の構成: このような空間が存在するか否かは Open Problems in Topology II (Edited by E. Pearl, 2006) 問題390で提出され、この問題に対する反例を構成したものである。 κ を連続濃度以上の正則な基数とする。このとき $(\kappa+1) \times (\kappa+1) \times I(n)$ ($I(n)$ は単位閉区間の n 個の積) の部分空間で、 $(\kappa+1) \times (\kappa+1)$ への射影が $1:1$ になる適当な部分空間を選ぶことにより、被覆次元が n となる空間を構成することができる。このような空間が弱順序付け可能であること、従って連続なセクターを許容することは、射影が $1:1$ であることから導かれる。但し $(\kappa+1) \times (\kappa+1)$ の位相は順序数空間 $(\kappa+1) \times (\kappa+1)$ に辞書式順序で生成される位相であり、 $I(n)$ との積は通常の Tychonoff の積とする。

(6) 特異セクターによる、各種ゼロ次元空間の特徴付け: 連続なセクターは閉集合 F に対し、 F と閉集合 H と和集合の値を常に F に取るとき F 極大と呼ばれる。この概念を用いて以下の様な結果を示した;

i) X はセクターを許容する空間とするそのとき X が totally disconnected 空間であることと任意の有限部分集合 F と点 $x \in X-F$ に対し $x \in S \subset X-F$ を満たす S 極大セクターが存在することが同値である。

ii) X はセクターを許容する空間とするそのとき X が零次元(小帰納的次元が零)空間であることと任意の開集合 V と点 $x \in V$ に対し $x \in S \subset V$ を満たす S 極大セクターが存在することが同値である。

iii) X はセクターを許容する空間とするそのとき X が正規な強零次元(被覆次元が零)空間であることと任意の開集合 F と任意の開集合 V で $F \subset V$ を満たすものに対し $F \subset S \subset V$ を満たす S 極大セクターが存在することが同値である。

部分集合 $A \subset X$ は弱セクターが存在し A が

そのセクターに関し $X-A$ より小さいとき、即ち $x \in A, y \in X-A$ に対し、常に x を選ぶ弱セクターが存在するとき initial segment と呼ばれる。この initial segment を用いて零次元空間は次の用に特徴付けることができる；

iV) X はセクターを許容する空間とするそのとき X が零次元 (小帰納的次元が零) 空間であることと任意の開集合 U と任意の点 $x \in U$ に対し initial segment A で $x \in A \subset U$ を満たすものが存在することが同値である。

V) X はセクターを許容する空間とするそのとき X が正規な強零次元 (被覆次元が零) 空間であることと任意の開集合 F と任意の開集合 V で $F \subset V$ を満たすものに対し $F \subset A \subset V$ を満たす initial segment A が存在することが同値である。

(7) n を 2 以上の自然数とし、空間 X の n 個の点集合全体からなる超空間の部分空間 $X(n)$ に連続セクターが存在するが $X(n+1)$ には存在しない n は存在するか (Open Problems in Topology II (Edited by E. Pearl, 2006) 問題 385) に対する考察である。得られた結果は $X(2), X(3)$ に連続セクターが存在すれば 3 点以下からなる超空間の部分空間にセクターが存在する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

- ① V. Gutev; T. Nogura, Weak orderability of topological spaces, *Topology Appl.* 157 (2010) 1249-1274, 査読有
- ② V. Gutev; T. Nogura, Set-maximal selections, *Topology Appl.* 157 (2010), 53-61 査読有
- ③ V. Chatyrko; Y. Hattori, On dimensional properties of the generalized Smirnov's spaces, *Topology Appl.* 157 (2010), 711-715, 査読有
- ④ Y. Hattori; H. Tsuiki, Hyperbolic topology of normed linear spaces, *Topology Appl.* 157 (2010) 77-82, 査読有
- ⑤ D. Shakhmatov; J. Spevak, Group-valued continuous functions with the topology pointwise convergence, *Topology Appl.* (2010) 1518-1540, 査読有
- ⑥ D. Dikranjan; D. Shakhmatov, Quasi convex density and determining subgroups of compact abelian, *J. Math. Anal. Appl.* 363 (2010) 42-48, 査読有

- ⑦ S. Dolecki; H. Kunzi; T. Nogura, Weak regularity and consecutive topologizations and regularizations of pretopologies, *Topology Appl.* 156 (2009) 1306-1314, 査読有
- ⑧ V. Chatyrko; Y. Hattori, Transfinite large inductive dimensions modulo absolute Borel classes, *J. Math. Soc. Japan* 61 (2009) 327-344, 査読有
- ⑨ Dikranjan, D; B. Giordano; D. Shakhmatov, Minimal pseudocompact group topologies on free abelian groups, *Topology Appl.* 156(2009) 2039-2053 査読有
- ⑩ D. Shakhmatov, Building suitable sets for locally compact groups by means of continuous selections, *Topology Appl.* 156 (2009) 1216-1223, 査読有
- ⑪ Garcia-Ferreira; V. Gutev; T. Nogura, Extensions of 2-point selections, *New Zealand J. Math.* 38 (2008)1-8, 査読有
- ⑫ V. Gutev; T. Nogura, Weak selections and flows in networks, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 49 (2008) 509-517, 査読有
- ⑬ V. Gutev; T. Nogura, Selections and totally disconnected spaces, *Topology Appl.* 155 (2008) 824-829, 査読有
- ⑭ V. Chatyrko; Y. Hattori, Addition and product theorems for ind, *Topology Appl.* 155(2008) 2202-2210, 査読有
- ⑮ H. Tsiki; Y. Hattori, Lawson topology of the space of formal balls and hyperbolic topology, *Theoret. Comput. Sci.* 405 (2008) 198-205, 査読有
- ⑯ V. Chatyrko; Y. Hattori, Infinite dimensionality modulo absolute Borel classes, *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.* 56 (2008) 163-176, 査読有
- ⑰ D. Dikranjan; D. Shakhmatov, Reflection principle characterizing groups in which unconditionally closed sets are algebraic, *J. Group Theory* 11 (2008) 421-442, 査読有
- ⑱ G. Di Maio; Lj Kocinac; T. Nogura, Convergence properties of hyperspaces, *J. Korean Math. Soc.* 44 (2007) 845-854, 査読有
- ⑲ V. Chatyrko; Y. Hattori, There is no upper bound of small transfinite compactness degree in metrizable spaces, *Topology Appl.* 154 (2007) 1314-1320, 査読有
- ⑳ D. Dikranjan; D. Shakhmatov, Weight of closed subsets topologically generating a compact group, *Math. Nachr.* 280 (2007) 505-522, 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- ① Tsugunori Nogura, Selections and Dimensions
大 4 4 回位相空間論シンポジウム (島根大学) 2009 年 5 月 23 日
- ② Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori (発表者: 服部泰直) Remainders in extensions and finite unions of locally compact sets, 京都大学数理解析研究所研究集会「一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究」2009 年 10 月 15 日
- ③ Tsugunori Nogura, Continuous selections and Dimensions (Advances in Set-Theoretic Topology, Erice, Italy) 2008 年 6 月 9 日 (招待講演)
- ④ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, (発表者: 服部泰直) Dimensional properties of the generalized Smirnov's spaces, Advanced in Set-Theoretic Topology, International Center for Scientific Culture "E. Majorana", School of Mathematics "G. Stampacchia", Erice, Italy, 2008 年 6 月 12 日
- ⑤ Yasunao Hattori, Hideki Tsuiki, (発表者: 服部泰直) Lawson topology of the space of formal balls and the hyperbolic topology of a metric space, The 23th Summer Conference on Topology and its Applications, University of National Autonomous of Mexico, Mexico City, 2008 年 7 月 30 日
- ⑥ Vitalij Chatyrko, Yasunao Hattori, (発表者: 服部泰直) Borel classes dimension and generalization of Smirnov's compacta, 京都大学数理解析研究所研究集会「一般・幾何学的トポロジーの研究動向と諸問題」京都大学、2008 年 10 月 8 日
- ⑦ Tsugunori Nogura, Selections and Dimensions (22 Summer Conference on Topology and its Applications, Castillon, Spain 2007 年 7 月 25 日)
- ⑧ Yasunao Hattori, Hideki Tsuiki, (発表者: 服部泰直) The hyperbolic topology of normed linear spaces, International Conferences in Topology and its Applications 2007 at Kyoto, Jointly with 4th Japan-Mexico Topolog Conference, 京都大学, 2007 年 12 月 5 日 (招待講演)

[図書] (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野倉 嗣紀 (NOGURA TSUGUNORI)
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 00036419

(2) 研究分担者

シャクマトフ デミトリ (SHAKHMATOV
DMITRII)
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 90253294

藤田 博司 (FUJITA HIROSHI)
愛媛大学・理工学研究科・講師
研究者番号: 60238582

服部 泰直 (HATTORI YASUNAO)
島根大学・総合理工学部・教授
研究者番号: 20144553