

平成 22 年 5 月 20 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540140

研究課題名（和文）拡散過程とファジィ集合値確率解析の研究

研究課題名（英文）Studies on diffusion processes and fuzzy valued stochastic analysis

研究代表者

小倉 幸雄 (OGURA YUKIO)

佐賀大学・理工学部・非常勤講師

研究者番号：00037847

研究成果の概要（和文）：本研究では、まず一次元拡散過程について強マルコフ性の条件は満たさないが、マルコフ性を満たす多くの新しい確率過程を解明し、それらのクラスを決定した。つぎにファジィ集合値確率変数について大数の法則の拡張を行い、大偏差原理を導出した。さらに、ファジィ集合や集合を係数にもつ確率微分方程式の確率 1 でファジィ集合や集合の値をとる解の一意的な存在を証明した。Chern-Simons 解析における指数 3 次の項を被積分関数とする漸近剰余の評価を行った。2 パラメータ Poisson-Dirichlet 分布について新たな特徴づけを与えた。

研究成果の概要（英文）：In this study, we first found a lot of new type of stochastic processes in the class of one-dimensional continuous stochastic process with Markov property but without strong Markov property, and moreover determined that class. We then extended strong laws of large numbers and derived large deviation principle for fuzzy set valued random variables. In addition, we proved the existence and uniqueness of solutions almost surely in the space of fuzzy sets (resp. sets) to stochastic differential equations with fuzzy sets (resp. sets) coefficients. We also estimated the term with power 3 integrand in the asymptotic expansion in perturbative Chern-Simons theory. A new characterization of the two-parameter Poisson-Dirichlet distribution was given.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：(1) 拡散過程 (2) マルコフ性 (3) ファジィ集合値確率変数

(4) 集合係数の確率微分方程式 (5) 大偏差原理 (6) Chern-Simons 理論

(7) Poisson-Dirichlet 分布

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 1989年に本研究代表者は、一次元拡散過程の系列の極限として現れる確率過程のクラスを広義拡散過程と命名して、それが強マルコフ性を失うが、ある商空間で考えるとマルコフ性を持つことを示したが、数年前池田信行から、逆にマルコフ性をもつ確率過程はそれらに限るかという問題を提起された。この問題に答えるべく始めたのが連続な経路をもつ一次元マルコフ過程の研究である。

(2) ファジィ集合値確率変数に関する大偏差原理は重要な課題であるが、今まであまり手がつけられていなかった。ファジィ集合の空間の位相が本質的な役割を果たすが、その研究が整理されていなかったためであるが、この課題に取り組むことが求められていた。

(3) ファジィ集合値の確率微分方程式の研究は長い間待望されていたが、ファジィ集合の空間には有効な差の概念がなく目立った進展がなかった。この課題に何とか取り組む必要があった。

(4) Chern-Simons 理論の元来の形は、物理の常套手段である摂動展開である。これの数学的定式化は期待されながら幾多の困難から放置された。これに確率論を用いて果敢に取り組んだ。

(5) Pitman と Yor が導入した2パラメータ Poisson-Dirichlet 分布は、重要性は認識されているものの、様々な量の計算が難しく、またその表示も複雑である。そこで、この無限次元分布に対して、扱いやすい解析手法を与えることは意義のあることだと考えていた。

## 2. 研究の目的

(1) 強マルコフ性をもつとは限らないがマルコフ性をもつ経路が連続な一次元確率過程のクラスを決める。

(2) ファジィ集合値確率変数についての Cramer 型と Sanov 型の大偏差原理を証明する。また、集合値確率変数とファジィ集合値確率変数についての中偏差原理を得る。

(3) 集合やファジィ集合を係数にもつ確率微分方程式の解の存在と一意性を証明する。また、それを数理ファイナンスにおける Black-Sholes モデルの拡張に適用する。

(4) 研究の背景で述べた課題について、数学における漸近展開理論を用いて、既に表現論など他の方法で結果が正当化されている不変量を根本から見直して求める。

(5) Poisson-Dirichlet 分布について新たな視点での解析手法を与え、それにより既存の結果の理解を深めるだけでなく、これまでよりも高度な解析結果を導く。

## 3. 研究の方法

(1) 一次元広義拡散過程の結果を整理して見直し、強マルコフ性が崩れる現象について詳しく調べ、いくつかの典型的な例を見出し、これらを精査する。次に、Ito-McKean による一次元拡散過程の構成において、強マルコフ性を必要とする所を抜き出して、それらをマルコフ性のみで代替する方法を模索し、上で調べた例を参考にして何処までのことが言えるかを検討する。

(2) ファジィ集合の空間のいくつかの位相と  $\sigma$  集合体について、それらの性質と強弱関係を調べる。それらの中で、ファジィ集合値確率変数についての大偏差が成り立ちそうな位相、すなわちファジィ集合を埋め込む大きなバナッハ空間が可分な線形位相空間になるような位相を選び、それに関してレベル集合が凸であるファジィ集合値確率変数についての Cramer 型と Sanov 型の大偏差原理を証明する。次に、この結果を用い少し強い条件を課して、レベル集合が必ずしも凸であるとは限らないファジィ集合値確率変数についての Cramer 型の大偏差原理を証明する。更に、集合値確率変数とファジィ集合値確率変数についての中偏差原理を得る。

(3) 集合の値をとる確率過程の Ito 積分と Lebesgue 積分を定義し、それらの性質を調べる。集合やファジィ集合を係数にもつ確率微分方程式の定義を行い解の存在と一意性を調べる。また、それを数理ファイナンスにおける Black-Sholes モデルの拡張についても調べる。

(4) 確率論の中の無限次元確率解析の手法を用いて無限次元の停留位相法を発展整備する。コーシーの積分定理を無限回適用することを正当化する。

(5) 2パラメータ Poisson-Dirichlet 分布についての Pitman と Yor の議論の多くはラプラス変換に基く。我々はこれを無限次元の汎関数として捉えることにより、新たな展開を試みる。

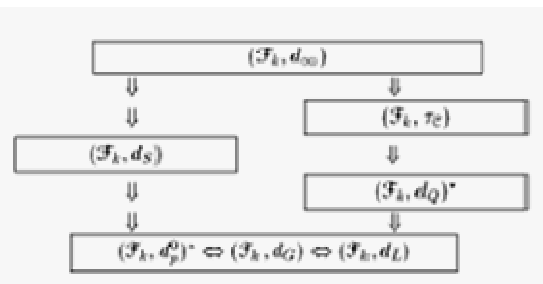
## 4. 研究成果

(1) 両端が trap である有界閉区間上の連続な経路をもつマルコフ過程が、次の条件を満たすとす。 (A1) レゾルベントはこの閉区間で稠密な集合の上で連続である。 (A2) この区間からの離脱時刻の平均は有限であって、標準尺度に関して下に凸である。 (A3) 離脱時刻の平均の標準尺度による右微分から生成される標準測度は、標準尺度の跳びの点のギャップに mass をもたない。このとき、この

過程の標準尺度で変換したものは、(A3)で与えられる標準測度と上と同じ標準尺度をもつ広義拡散過程となる。逆に、標準尺度が狭義単調増加である広義拡散過程は、上の条件(A1), (A2), (A3)を満たす。

この結果によって、自然な設定の下で連続な経路をもつ次元マルコフ過程のクラスが、標準尺度が狭義単調増加である広義拡散過程のクラスと一致することが分かる。なお、条件(A3)は条件(A1)と(A2)から導かれることが望ましいし、その可能性はあるがこれは今後の課題である。

(2) ①  $F_k$  をファジィ集合の空間、すなわち閉区間  $[0, 1]$  に値をとる上半連続関数の空間とし、これを  $[0, 1]$  から閉集合の空間への左連続で右極限をもつ関数の空間と捉える。このとき、一様位相  $d_\infty$ 、Skorohod 位相  $d_S$ 、変形された  $L^p$  位相  $d_p^0$ 、Levy 位相  $d_L$ 、筒位相  $\tau_c$ 、グラフ位相  $d_G$ 、それに  $[0, 1]$  で稠密な可算集合  $Q$  から決まる位相  $d_Q$  が自然に定義される。このとき、それらについて図のような強弱関係が成り立つ。



この中で、\*印の付いたものが、ファジィ集合を埋め込む大きなバナッハ空間が可分な線形位相空間となる位相空間である。

② 上の\*印の付いた空間の位相及び  $d_L$ 、 $\tau_c$ 、 $d_G$  位相に関して、レベル集合が凸であるファジィ集合値確率変数についての Cramer 型と Sanov 型の大偏差原理を証明した。また、それらの位相に関して、少し強い条件を課して、レベル集合が必ずしも凸であるとは限らないファジィ集合値確率変数についての Cramer 型の大偏差原理を証明した。③ 集合値確率変数とファジィ集合値確率変数についての中偏差原理を証明した。④ 今後の課題としては、レベル集合が必ずしも凸であるとは限らないファジィ集合値確率変数についての Sanov 型の大偏差原理や中偏差原理を調べることが考えられる。

(3) ① 自明でない集合値の確率過程の Ito 積分は  $L^2$  では有界だが、確率 1 で見ると有界でないことを突き止めた。この結果、確率 1 で解を考える確率微分方程式では、確率積分の項の係数は集合ではなく、スカラーの値をとる必要がある。

② ①の結果を受けて、確率微分の項の係数がスカラーでずれの項の係数が集合である一次元確率微分方程式の集合値をとる解の

存在と一意性を、比較定理を用いて証明した。さらに、これを用いて、数理ファイナンスにおける Black-Scholes モデルを期待収益率が集合である場合に拡張して解析を行った。また、ずれの項の係数がファジィ集合である確率微分方程式の解の存在と一意性を得た。

③ 確率微分の項の係数がスカラーでずれの項の係数が集合である確率微分方程式への②と異なる接近を行い、解の存在と一意性を得た。②の方が豊富な内容を含んでいるが、ここでの方法は定義が簡単で多次元にも適用できる。

④ ③の定式化を用いてずれの係数が集合であり跳びの項のある確率微分方程式の解の存在と一意性を得た。

⑤ 今後の課題としては、跳びのある確率微分方程式で、④では補正項のある部分を含まないことを仮定していたが、これを除く問題などが考えられる。また、具体例についても考える必要がある。

(4) 指数 3 次の項を被積分関数とする漸近剰余の評価を果敢な定義のもとで行った。

(5) Poisson-Dirichlet 分布について点過程の観点から解析した結果、相関関数と確率母関数の表示が得られた。そして、それらを基に様々な密度公式や極限定理を導くことができた。

(6) 緩変動する重みを付けたファジィ集合値独立確率変数についての大数の強法則を得た。大数の法則が成り立つための重みについてのぎりぎりの条件を求めたもので、当該論文⑫は InTech'07 で最優秀論文賞を受けた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件)

- ① Yukio Ogura, Shoumei Li, Xia Wang, Large and moderate deviations of random upper semicontinuous functions, Stoch. Analysis Appl., 査読有, 28, 2010, 350-376.
- ② Jun Guan Li, Shoumei Li, Yukio Ogura, Strong solution of Ito type set-valued stochastic differential equation, Acta Math. Sinica, 査読有, 26, 2010, 1-12.
- ③ Yukio Ogura, Takayoshi Setokuchi, Large deviations of random upper semicontinuous functions, Tohoku Math. Jour., 査読有, 61, 2009, 213-223.
- ④ Jinping Zhang, Yukio Ogura, On set-valued stochastic differential equation of jump type, Proceedings of the 10th International Conference on Intelli-

- gent Technologies (InTech'09), 査読有, 2009, 493-499.
- ⑤ Sergio Albeverio, Itaru Mitoma, Asymptotic expansion of perturbative Chern-Simons theory via Wiener space, Bull. Sci. Math., 査読有, 133, 2009, 272-314.
- ⑥ Jingpig Zhang, Shoumei Li, Itaru Mitoma, Yoshiaki Okazaki, On the solutions of set-valued stochastic differential equations in M-type 2 Banach spaces, Tohoku. Math. Jour., 査読有, 61, 2009, 417-440.
- ⑦ Jingpig Zhang, Shoumei Li, Itaru Mitoma, Yoshiaki Okazaki, On set-valued stochastic integral in an M-type 2 Banach spaces, Jour. Math. Analysis. Appl. 査読有, 350, 2009, 216-233.
- ⑧ Kenji Handa, The two-parameter Poisson-Dirichlet point process, 査読有, Bernoulli, 15, 2009, 1082-1116.
- ⑨ Li Guan, Shoumei Li, Yukio Ogura, A strong law of large numbers of fuzzy set-valued random variables with slowly varying weights, Int. Jour. Automation and Control, 査読有, 2, 2008, 365-375.
- ⑩ Yukio Ogura, On stochastic differential equations with fuzzy set coefficients, Advances in Soft Computing (Soft Methods for Handling Variability and Imprecision), 査読有, 48, 2008, 263—270.
- ⑪ Yukio Ogura, On stochastic differential equations with set coefficients and the Black-Scholes model, Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Intelligent Technologies (InTech'07), University of Technology Sydney, 査読有, 2007, 300-3004.
- ⑫ Li Guan, Shoumei Li, Yukio Ogura, A strong law of large numbers of fuzzy set-valued random variables with slowly varying weights, Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Intelligent Technologies (InTech'07), University of Technology Sydney, 査読有, 2007, 82-86.
- ⑬ Yukio Ogura, On some metrics compatible with the Fell-Matheron topology, International Journal of Approximate Reasoning, 査読有, 46, 2007, 65-73.
- ⑭ Itaru Mitoma, Seiki Nishikawa, Asymptotic expansion of the one loop approximation of the Chern-Simons integral in an abstract Wiener space setting, Jour. Funct. Anal., 査読有, 253, 2007, 729-771.
- ⑮ Sergio Albeverio, Itaru Mitoma, Asymptotic expansion of perturbative Chern-Simons theory via Wiener space, SFB 611 No.322, Bonn University, 2007, 50pp.
- ⑯ Nobuyuki Ikeda, Yukio Ogura, On a class of one-dimensional Markov processes with continuous paths, AMS Contemp. Math., 査読有, 429, 2007, 131-142.
- [学会発表] (計 10 件)
- ① Jingping Zhang, Yukio Ogura, On set-valued stochastic differential equation of jump type, Proceedings of the 10th International Conference on Intelligent Technologies (InTech'09), 2009年12月14日, Guangxi Normal University.
- ② 半田賢司、移入を伴う分子過程の定常分布について、研究集会「確率解析の理論と応用—さよなら箱崎」、2009年7月25日、九州大学。
- ③ 小倉幸雄、集合を係数にもつ確率微分方程式について、研究集会「確率解析の理論と応用—さよなら箱崎」、2009年7月24日、九州大学。
- ④ Yukio Ogura, On stochastic differential equations with fuzzy set coefficients, Fourth International Workshop on Soft Methods in Probability and Statistics, 2008年9月9日, IRIT University, Paul Sabatier.
- ⑤ 小倉幸雄、集合係数の確率微分方程式についての注意、日本数学会年会、2008年3月24日、近畿大学。
- ⑥ Yukio Ogura, On stochastic differential equations with set coefficients and the Black&Scholes model, The Eighth Conference on Intelligent Technologies, 2007年12月14日, University of Technology Sydney.
- ⑦ Li Guan, Shoumei Li, Yukio Ogura, A Strong law of large numbers of fuzzy set-valued random variables with slowly varying weights, The Eighth Conference on Intelligent Technologies, 2007年12月12日, University of Technology Sydney.
- ⑧ Yukio Ogura, A remark on stochastic differential equations with set coefficients, Workshop on Set-valued Analysis, 2007年10月12日, Beijing University of Technology.
6. 研究組織
- (1) 研究代表者  
小倉 幸雄 (OGURA YUKIO)  
佐賀大学・理工学部・非常勤講師  
研究者番号 : 00037847
- (2) 研究分担者  
三苦 至 (MITOMA ITARU)

佐賀大学・理工学部・教授  
研究者番号：40112289

半田 賢司 (HANDA KENJI)  
佐賀大学・理工学部・准教授  
研究者番号：10238214