

機関番号：17501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540141

研究課題名(和文) 有限積から無限積へ:集合論的手法による積空間の位相的性質の解明

研究課題名(英文) From finite products to infinite products: investigations of topological properties of product spaces by means of set theoretical methods

研究代表者

家本 宣幸 (KEMOTO NOBUYUKI)

大分大学・教育福祉科学部・教授

研究者番号：70161825

研究成果の概要(和文): 当初の目的は、有限積の位相的性質を通して無限積の位相的性質を調べることであった。しかし、これら積の理論に elementary submodels と呼ばれる集合論的手法を使うことで、閉集合全体や compact 集合全体からなる hyperspace と呼ばれる位相空間の位相的性質を調べることができ、当初の目的以外の方向に発展した。

研究成果の概要(英文): Original purposes of this research were to investigate topological properties of infinite product spaces by means of these of finite product spaces. But by applying a set theoretical tool so called elementary submodels to product theory, we investigated topological properties of hyperspaces of all closed sets or all compact sets.

交付決定額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	400,000	120,000	520,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	2000,000	600,000	2600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：topological spaces, finite products, infinite products, elementary submodels, hyperspaces

1. 研究開始当初の背景

順序数は集合論の理論の中心的役割を果たすものである。近年、large cardinal、stationary refraction principle、順序数や $P_{\kappa\lambda}$ 上の club guessing、及び $V=L$ や forcing extension との関係が日本の集合論研究者によってさかんに議論されている。一方、積空間の位相的性質に関する日本での研究は 60 年代に始まり、研究結果の多さとレベルの高さではアメリカに匹敵し、他の諸外国をリードしている。90 年代からは本研究代表者らのグループによる順序数の積空間

の研究が始まり、現在も活発な議論が展開されている。

一連の研究の発端となったのは順序数の部分空間の積の正規性と可算パラコンパクト性に関する 1992 年の本研究代表者らによる研究である。この研究で非可算最小順序数 ω_1 の互いに素な stationary sets S_0, S_1 について ω_1^2 の部分空間 $X = S_0 \times S_1$ は正規でも可算パラコンパクトでもないことが示された。この後、正規性や可算パラコンパクト性に近いと考えられていた位相的性質も、順序数の積の部分空間では全く違った動きをすることが次々とわかってきた。例えば

Orthocompact という位相的性質は積の理論では正規性ととても似た性質を持っていることが本研究代表者らによって 1992 年、1993 年、1994 年などの論文で知られていたが、1997 年の研究で、順序数の積の部分空間では正規性と比較不能な性質であることが判明した。また、可算パラコンパクト性とそれをほんの少し弱めた可算メタコンパクトという性質も、本研究代表者らによる 1996 年、1997 年などの研究によって順序数の積の部分空間では異なる概念であることが判明した。その他、可算パラコンパクト性と正規性の関係(2000 年)、積の正規性(1993 年、1996 年)、 σ -積や Σ -積及び無限積の位相的性質(2005 年、1994 年、2004 年)などの積空間の位相的性質に関する新しい結果を次々と得てきた。これらの結果は、主に次の二つの考察 A, B に大別される。

- A. X と Y が性質 P を持つ位相空間とするとき、積空間 $X \times Y$ は性質 P を持つか?
- B. 各自然数 n について X_n が性質 P を持つ位相空間とするとき、無限積空間 $\prod_n X_n$ は性質 P を持つか?

ところが、近年本研究代表者らの 2003 年および 2006 年の研究から、A や B の範疇では片付けられない位相的性質があることがわかってきた。一例を見てみよう。strongly zero-dimensional、 κ -normal や subnormal などは正規に近い性質であることが知られているが 2002 年、2003 年の本研究代表者らの研究によって順序数の二つの積に関して次が示された。

- (1) S_0 と S_1 を ω_1 の部分空間とすれば、 $X = S_0 \times S_1$ は strongly zero-dimensional である。
- (2) S_0 と S_1 を ω_1 の部分空間とすれば、 $X = S_0 \times S_1$ は κ -normal である。
- (3) ω_1^2 のすべての部分空間は subnormal である。

上述したように ω_1^2 には正規でない部分空間 $X = S_0 \times S_1$ が存在することと比較すれば、当時はセンセーショナルな結果であった。その後、本研究代表者らによる 2003 年、2006 年の研究で三つの積に関して次の結果が得られた。

- (4) S_0, S_1 と S_2 を ω_1 の部分空間とすれば、 $X = S_0 \times S_1 \times S_2$ は strongly zero-dimensional である。
- (5) $X = S_0 \times S_1 \times S_2$ が κ -normal とはならない ω_1 の部分空間 S_0, S_1 と S_2 がある。
- (6) subnormal ではない ω_1^3 の部分空間がある。

これまで、二つの積で成立するが、三つの積では成立しないような位相的性質は殆ど知られていなかったが、これらは、順序数二つの積の考察と三つの積の考察が異なることを示している。また、順序数の積空間のある種の性質はその集合論に依存することもわかってきている。

2. 研究の目的

4 年間の研究期間の中で、まず、集合論のモデルに依存すると思われる順序数の二つの積についての未解決問題：

問題 I. ω_1^2 の可算パラコンパクトな部分空間は正規か?

を中心に、二つの積の様々な位相的性質と集合論モデルとの関係を考察する。
次に順序数の三つ以上の積について：

問題 II. 二つの積で成立するが三つの積で成立しないような積空間の性質は他にもあるか?

を考察し、それらを有限積一般へ拡張するための集合論的な道具(特に Pressing Down Lemma の有限積への一般化)を整備する。更にそれらを無限積に応用させ、無限積についての未解決問題：

問題 III. 順序数の部分空間の無限積は常に strongly zero-dimensional になるのか?

に解を与え、これらの応用を探す。更に非可算積の位相的性質についても考察する。

3. 研究の方法

この研究は基本的には一人で行なったが、同時にこれまでの研究パートナーや集合論の研究者達の最新情報やアイデアを聞きながら進めた。この分野の研究者は海外ではアメリカ在住者が多いが、国内では神奈川大学の矢島幸信氏を始め殆どが関東周辺在住である。本研究の研究旅費を利用して、関東方面での研究打ち合わせを行った。

雑誌や図書は殆ど手元にないので、普段の研究活動はパソコンによる電子メールでの情報交換・収集や、インターネットでの電子ジャーナル閲覧による情報収集が中心になった。更に、近年の情報化時代に対応して、海外や国内の研究者との連絡、電子ジャーナルや MathScinet の利用、論文や講演発表の

ための原稿作成などに最新のパソコンが不可欠であったため、研究室用のデスクトップパソコンとプリンタを更新し、国際会議での発表用のノートパソコンを購入した。又、最近の研究発表はパソコンとプロジェクターが利用され、画面の切り替えが早く記録が間に合わないことが多かったため望遠機能の付いたデジタルカメラを購入し、写真による記録をすることで有効に活用することができた。

通常、国内で年2回の学会、それぞれ最低年2回のトポロジーと集合論の両分野のシンポジウムが企画される。本研究の研究旅費を利用してそれらに出席し、最新情報の収集及び関係者との打ち合わせをすることができた。又、2007年の京都、2008年のイタリア、2010年のメキシコでの国際会議に本研究の研究旅費を利用してそのすべてで招待講演を行うことができた。同時に国外の研究者と最新情報の交換や研究の打ち合わせをすることができた。

4. 研究成果

研究目的の問題 I については「 $V=L$ を仮定すれば、最小非可算順序数の 2 つの積の normal 空間は countably paracompact である」が研究代表者らによって過去に示されたが、無矛盾な反例を構成するためには club guessing sequence を利用するのが有効であろうと予測するに留まった。問題 II については研究代表者のパートナーである筑波大学の平田康史氏が、collectionwise Hausdorff がそのような性質を持っていることを見つけてくれた。現在までのところ、順序数の部分空間の範疇で 2 つの積で成立するが 3 つの積で成立しないような位相的性質は、subnormal、 κ -normal と collectionwise Hausdorff の 3 種類が知られることとなった。問題 III については順序数の無限積の稠密部分空間である σ 積は strongly zero-dimensional までわかったが、順序数の一般の無限積がどうであるかまでは解明できなかった。後述するように、研究目的以外の積空間の性質や、順序数の部分空間の性質に関する結果が得られた。

その一方で特筆すべきは、これらの積の理論や集合論の技術が、順序数の hyperspace の理論に応用できるといった思わぬ方向へと展開し、大きな収穫を得た。この理論は、特に順序数の hyperspace の理論での複雑な証明のショートカットを与えるものとして応用が期待され、国内外に大きなインパクトを与えた。

主な研究成果を順に具体的に述べていくと、2007 年度は順序数の二つの積の可算パ

ラコンパクト性と正規性の考察を応用して、順序数の空でない閉集合やコンパクト集合からできるいくつかの hyperspace の可算パラコンパクト性と正規性について調べることができた。具体的には次のことがわかった。

(1) 順序数 α に対して、 α の空でない閉集合全体の集合に Vietoris 位相を入れた空間を 2^α と表す。 α の空でないコンパクト集合全体の集合に 2^α の部分空間の位相をいれた空間を $K(\alpha)$ と表す。この時:

- ① 2^α が可算パラコンパクトであることの必要十分条件は $cf\alpha$ が可算でないことである。
- ② $K(\alpha)$ は常に可算パラコンパクトである。
- ③ $K(\alpha)$ が正規であることの必要十分条件は、 $cf\alpha$ が非可算ならば、 $cf\alpha = \alpha$ となることである。

ここで $cf\alpha$ は α の cofinality を表す。特に③の証明に、hyperspace の理論に始めて集合論的手法 elementary submodel が使われていることは特筆すべきことである。この証明の elementary submodel を使わない通常の証明は 2010 年の研究でわかることとなった。また、次元の理論で正規性と密接な関係を持つ rectangular 性が、順序数の積の理論では可算パラコンパクト性とより密接な関係があることが神奈川大学の矢島幸信氏との共同研究でわかった。

(2) A と B を順序数 α の部分空間とするとき、積空間 $A \times B$ が rectangular であることの必要十分条件は、それが可算パラコンパクトであることである。

2008 年度は平田氏との共同研究で、順序数の有限積を考える上で必要な順序数そのものの性質がひとつわかり、イタリア・シシリイ島・エリーチェで行われた国際会議「Advances in Set-Theoretic Topology」で発表された。位相空間 (X, τ) が線形順序(整列順序)付け可能とは、 X 上の線形順序(整列順序) $<$ が存在して、その順序から導かれる位相と元の位相 τ が一致することである。この会議で

(3) 順序数の部分空間は常に線形順序付け可能である。

について述べ、更に順序数の部分空間が整列順序付け可能であることの必要十分条件について述べた。本研究代表者を含め、この分野の大多数の研究者が最小非可算順序数 ω_1 の stationary co-stationary subset は線形順序付け不可能と予想していたが、否定的な結果が得られ大きなインパクトを与えた。これらは 2010 年に Topology and its applications に掲載された。また、矢島氏と

の共同研究では β -sequence がどのような場合に compact closure を持つかについて考察され、これも *Topology and its Applications* に掲載された。位相空間の点列 $\{x_n\}$ が β -sequence であるとはその任意の部分列が触点を持つことを言う。点列 $\{x_n\}$ の閉包がコンパクトのときその点列は compact closure を持つと言う。

(4) Monotonic normal 空間における β -sequence は常に compact closure を持つ。

(5) 通常の集合論の下では「perfectly normal 空間の β -sequence が compact closure を持つ」という命題の肯定も否定も証明できない。

2009 年度は hyperspace の strong zero-dimensionality の考察への elementary submodel の応用を目指し、防衛大学の寺澤氏と次の結果を得た。

(5) 自然数の部分集合全体からなる hyperspace は strongly zero-dimensional である。

(6) 任意の順序数のコンパクト集合全体からなる hyperspace は strongly zero-dimensional である。

これらの結果は2009年12月にジェネラルトポロジーシンポジウムでも発表され、反響を得た。

2010 年度は本研究の総仕上げとして、筑波大学の平田氏との共同研究で、2007 年の結果の elementary submodel を使わない証明方法が開発された。それを利用し hyperspace について次のような新たな結果も得ることができた。

(7) 自然数の部分集合全体からなる hyperspace が orthocompact であることと countably metacompact であることは同値である。

(8) 任意の順序数のコンパクト集合全体からなる hyperspace が orthocompact であることと normal であることは同値である。

(9) Sorgenfrey line のコンパクト集合全体からなる hyperspace は orthocompact である。

(10) Sorgenfrey line の可算無限積は orthocompact である。

これらは2010年6月にメキシコで開催された国際会議で招待講演として発表され高い

評価を得、*Topology and its Applications* に掲載が受理されている。また前年度得られた防衛大学の寺澤順氏との結果が *Topology and its applications* に掲載された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① 家本宣幸, Erratum to: "Normality and countable paracompactness of hyperspaces of ordinals", *Topology and its Applications* 154 (2007) 358-362, *Top. Appl.* 157, 2446-2447 (2010) 査読有
- ② 家本宣幸, 寺澤 順, Strong zero-dimensionality of hyperspaces, *Top. Appl.* 157, 2376-2382 (2010) 査読有
- ③ 平田康史, 家本宣幸, Orderability of subspaces of well-orderable topological spaces, *Top. Appl.* 157, 127-135 (2010) 査読有
- ④ 家本宣幸, 矢島幸信, Certain sequences with compact closure, *Top. Appl.* 156, 1348-1354 (2009) 査読有
- ⑤ 家本宣幸, 矢島幸信, Rectangular Products with ordinal factor, *Top. Appl.* 154, 758-770 (2007) 査読有
- ⑥ 家本宣幸, Normality and countable paracompactness of hyperspaces of ordinals, *Top. Appl.* 154, 358-362 (2007) 査読有

[学会発表] (計5件)

- ① 家本宣幸, Topological properties of hyperspaces: a set theoretical approach, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, Colima, Mexico, September 27 - October 1 (2010) 国際学会, 招待講演
- ② 家本宣幸, 寺澤 順, Applications of elementary submodels to hyperspaces, 2009 General Topology シンポジウム, Oita Univ. December 16-18(2009).
- ③ 家本宣幸, Orderability of subspaces of well-orderable topological spaces, Advances in Set-Theoretic Topology, Erice Sicily Italy, June 9-19 (2008) 国際学会・招待講演
- ④ 家本宣幸, Applications of theory of stationary sets to topology, International Conference on Topology and its Applications 2007, Univ.

Kyoto, December 3-7 (2007) 国際学会・招待講演

- ⑤ 家本宣幸, 矢島幸信, The compact closure of sequences in monotonically normal spaces, 第43回位相空間論シンポジウム, 東京学芸大学, May 24-25 (2007).

[図書] (計0件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計0件)
○取得状況 (計0件)

[その他] なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

家本 宣幸 (KEMOTO NOBUYUKI)
大分大学・教育福祉科学部・教授
研究者番号: 70161825