

機関番号：23803

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：平成19年度～平成22年度

課題番号：19540142

研究課題名(和文) シングルパスデザインと2パスデザインの構成に関する研究

研究課題名(英文) Construction of single-path designs and 2-path designs

研究代表者

小林 みどり (MIDORI KOBAYASHI)

静岡県立大学・経営情報学部・教授

研究者番号：00136631

研究成果の概要(和文)：

グラフの Dudeney 集合とは、全ての 2-path をちょうど 1 回ずつ含むハミルトンサイクルの集合のことである。全ての次数  $n$  の完全グラフに Dudeney 集合が存在するということが古くから予想されているが、 $n$  が偶数のときは解決されているものの  $n$  が奇数のときは現在も未解決である。完全二部グラフの Dudeney 集合についても、成果があまり知られていない状況である。

本研究において、黒色 1 因子を導入し、黒色 1 因子から Dudeney 集合が構成できることを証明し、 $p+1$  次黒色 1 因子が存在するための必要条件は  $2$  が  $p$  を法として平方剰余であることを証明した。その上でコンピュータ探索により黒色 1 因子を発見し、完全グラフの新しい Dudeney 集合をいくつか構成した。

次に、 $2n$  次完全二部グラフについて、 $n = 0, 1, 3 \pmod{4}$  のときに Dudeney 集合を構成し、 $n = 2 \pmod{4}$  のとき二重 Dudeney 集合を構成した。

$2n$  次完全二部グラフの 4-cycle についての Dudeney 集合も研究した。その存在条件は、(i)  $n$  は偶数、または、(ii)  $n$  が奇数かつ  $\lambda$  が偶数、のいずれかが成り立つことであることを証明した。ここで、 $\lambda$  は重複数である。

本研究では、graceful labeling についても研究し、新しい tree について graceful labeling の構成を行った。さらに、いくつかのデザインについても研究を行った。

研究成果の概要(英文)：

A set of Hamilton cycles in a graph is called a Dudeney set if every 2-path lies on exactly one of the cycles. It has been conjectured that there is a Dudeney set in the complete graph of order  $n$  for all  $n$ . It is known that there exists a Dudeney set when  $n$  is even, but the conjecture is still unsettled when  $n$  is odd.

In this research, we defined a black 1-factor, and proved that if there exists a black 1-factor then we can construct a Dudeney set. We also proved that if there is a black 1-factor of order  $p+1$ , then  $2$  is a quadratic residue modulo  $p$ . Using this result, we obtained some new Dudeney sets.

We studied the existence problem of a Dudeney set in the complete bipartite graph of order  $2n$  and we proved the following theorem. There exists a Dudeney set in the complete bipartite graph of order  $2n$  when  $n = 0, 1, 3 \pmod{4}$ , and there exists a double Dudeney set when  $n = 2 \pmod{4}$ . When  $n = 2 \pmod{4}$ , the existence problem of a Dudeney set remains open.

We studied the problem on a Dudeney set of 4-cycles, and we proved that there exists a Dudeney set of 4-cycles if and only if one of the following holds: (i)  $n$  is even, or (ii)  $n$  is odd and  $\lambda$  is even.

We have studied graceful labelings of trees and have found new graceful labelings of some trees. We also obtained some results on construction of some combinatorial designs.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成19年度	500,000	150,000	650,000
平成20年度	500,000	150,000	650,000
平成21年度	500,000	150,000	650,000
平成22年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：グラフ理論、組合せ論

科研費の分科・細目：数学一般（含む確率論・統計数学）・離散数学

キーワード：Dudeney 集合、2パスデザイン

1. 研究開始当初の背景

本研究は、(1) シングルパスデザインの構成、及び (2) 2パスデザインの構成に関する研究を行うものである。

(1) について、研究開始当初の背景は、シングルパスデザインの構成に関して Rosa は "graceful labeling" を提案し、それがシングルパスデザインの構成に対して有効であることを示していた。これに関して Ringel と Kotzig は、すべての tree は "graceful labeling" を持つことを予想したが、この予想は未解決であった。解決している tree は、path、caterpillar、symmetrical tree、firecracker、symmetrical tree、end point が 4 個以下の tree、直径が 5 以下の tree、olive tree、regular bamboo tree、banana tree、extended banana tree、そして位数がある程度小さい tree の場合のみであり、このテーマに関する新しい成果が求められていた。

(2) について、研究開始当初の背景は、2パスデザインの構成の中で主要なテーマである完全グラフの Dudeney 集合について、偶数のときは 1991 年に解決されていたが、奇数の場合は僅かな場合しか解かれておらず、未解決であった。完全二部グラフの Dudeney 集合についても、国際的にも成果があまり得られていない状況であった。

2. 研究の目的

(1) に関しては、「研究開始当初の背景」欄に記載したとおり、Rosa は "graceful labeling" を提案し、Ringel と Kotzig は、すべての tree は "graceful labeling" を持つことを予想した。しかし、この予想は未解決であった。したがって本研究においては、labeling などのシングルパスデザインの構成について、新しい結果を得ることを目的とする。また、まだ解明されていない tree の graceful labeling の新しい結果を得ることを目的とする。

(2) に関しては、主に、完全グラフの

Dudeney 集合と完全二部グラフの Dudeney 集合について、新しい構成法を発見し、このテーマの研究を進展させることを目的とする。

3. 研究の方法

(1) に関しては、現在構成されている tree について、その構成法を様々な角度から考察し、interlaced graceful labeling による構成法を研究する。また、いくつかの新しい tree について、隣接行列のパターン表示を使用して graceful labeling の構成を行う。

(2) に関しては、完全グラフの Dudeney 集合と完全二部グラフの Dudeney 集合についての研究を主に行う。具体的には、黒色 1 因子についての研究を進展させ、コンピュータによる新しい Dudeney 集合の探索を行う。完全二部グラフの Dudeney 集合については、他の研究者らにより既に得られている結果を収集・考察し、未解決の場合について構成法を解明する。その際、Antipodal の手法を適用する。

4. 研究成果

(1) に関しては、firecracker の interlaced graceful labeling について研究し、新しいいくつかの tree についての graceful labeling を構成法を発見することができた。

(2) に関しては、主に次の成果が得られた。

①黒色 1 因子に関する研究：

黒色 1 因子から Dudeney 集合が構成できることを証明し、 $p+1$  次黒色 1 因子が存在するための必要条件は、2 が  $p$  を法として平方剰余であることを利用して、コンピュータ探索により黒色 1 因子を発見し、完全グラフの新しい Dudeney 集合をいくつか構成した。それらは、 $n=9, 19, 25, 33, 43, 49, 73, 75, 81, 91$  の Dudeney 集合である。このうちの  $n=75$  と  $91$  は、今まで存在が知られていなかった新しい Dudeney 集合である。上記の方法により、75 次と 91 次の Dudeney 集合を新しく構成することができた。今後の課題として

は、すべての場合について黒色 1 因子の存在を証明することが挙げられる。(しかし、この問題は難問であると思われる。)

②完全二部グラフの Dudeney 集合に関する研究:

2n 次完全二部グラフについて、n が 4 を法として 0, 1, 3 のとき、Dudeney 集合を構成することができた。n が 4 を法として 2 のときは、二重 Dudeney 集合を構成することができた。この成果は、2011 年にイギリスで開催される国際会議で発表する予定である (accept 済)。ここで、「二重」とは、重複数が 2 という意味である。

③完全二部グラフの 4-cycle の Dudeney 集合に関する研究:

完全グラフの 4-cycle の Dudeney 集合はすでに解決されているが、完全二部グラフの 4-cycle の Dudeney 集合は一部しか解決されていなかった。本研究において、2n 次完全二部グラフの 4-cycle の Dudeney 集合が存在する必要十分条件は、(i) n は偶数、または、(ii) n が奇数かつ  $\lambda$  が偶数、のいずれかが成り立つことであることを証明した。(ここで、 $\lambda$  は重複数である。) これにより完全グラフ、完全二部グラフとも、4-cycle の Dudeney 集合の構成問題は完全に解決したといえる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① M. Kobayashi, B. McKay, N. Mutoh, G. Nakamura, Black 1-factors and Dudeney sets, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, Vol. 75, 2010, 167-174, 査読有
- ② Arrangements of n points whose incident-line-numbers are at most  $n/2$ , J. Akiyama, H. Ito, M. Kobayashi, G. Nakamura, the JCCGG2009 special issue of Graphs and Combinatorics (G&C), Springer, accepted. 査読有
- ③ M. Kobayashi, G. Nakamura, Exact coverings of 2-paths with Hamilton cycles for the complete bipartite graph, Working paper series, School

of Administration and Informatics, University of Shizuoka, 2010, 1-5, 査読無

- ④ M. Kobayashi, G. Nakamura, Uniform coverings of 2-paths with 4-cycles in the complete bipartite graph, Working paper series, School of Administration and Informatics, University of Shizuoka, 2010, 1-4, 査読無
  - ⑤ M. Kobayashi, C. Nara, G. Nakamura, Graceful Labeling of some trees, Working paper series 2010, School of Administration and Informatics, University of Shizuoka, 2010, 1-10, 査読無
  - ⑥ M. Kobayashi, C. Nara, G. Nakamura, Interlaced Graceful Labeling of Firecrackers, Working paper series 0902, School of Administration and Informatics, University of Shizuoka, 2009, 1-5, 査読無
  - ⑦ J. Akiyama, M. Kobayashi, G. Nakamura, Dudeney transformation of normal tiles, Lecture Notes in Computer Science 4535, Springer, 2008, 10-13, 査読有
  - ⑧ H. Ito, M. Kobayashi, G. Nakamura, Semi-Distance Codes and Steiner Systems, Graphs and Combinatorics, 23, 2008, 283-290, 査読有
- [学会発表] (計 5 件)
- ① S. Chikaraishi, M. Kobayashi, N. Mutoh, G. Nakamura, Magic squares with powered sum the China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications, 2010. 11. 6, 大連, 中国.

- ② M. Kobayashi, G. Nakamura, Exact coverings of 2-paths with 4-cycles in the complete, bipartite graph, the 54th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society, 2010. 9, 29, Brisbane, Australia.
- ③ H. Ito, M. Kobayashi, G. Nakamura, Arrangements of  $n$  points whose incident-line-numbers are at most  $n/2$ , Japan Conference on Computational Geometry and Graphs, 2009. 11, Kanazawa, Japan.
- ④ H. Ito, M. Kobayashi, G. Nakamura, Arrangements of eleven points in the plane, each with five incident lines, Japan Conference on Computational Geometry and Graphs, 2009. 11, Kanazawa, Japan.
- ⑤ J. Akiyama, M. Kobayashi, G. Nakamura, Dudeney transformation of normal tiles, General topologyシンポジウム, 2008. 12, 高崎.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小林みどり (MIDORI KOBAYASHI)  
 静岡県立大学・経営情報学部・教授  
 研究者番号：00136631

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし