様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２２年５月３１日現在

研究種目：　基盤研究（C）
研究期間：　2007～2009
課題番号：　１９５４０１４６
研究課題名（和文）　解析的構造と擬極小体のモデル理論

研究課題名（英文）　Model Theory of analytic structures and quasi-minimal fields

研究代表者
板井　昌典（ITAI　MASANORI）
東海大学・理学部・教授
研究者番号：８０２６６３６１

研究成果の概要（和文）：

成果は２つあげられる．代数幾何で有名な「Chow の定理」に対応する定理が，解析的ザリスキー幾何で成り立つことをオックスフォード大学の Peatfield 博士と Zilber 教授が証明したが，彼らの結果の一般形が成り立つことを示した．

二番目は，複素数体における「Richardson の定理」を Kex と呼ばれる代数的閉体に一般化した．すなわち，有限個の指数関数を含む代数的な方程式を「代数的指数関数方程式」とよび，代数的指数関数方程式の有限個の連立方程式の解集合の既約分解を Kex で行った．

研究成果の概要（英文）：

There are two results: the first one is concerning “Chow’s Theorem”. This famous theorem in algebraic geometry claims that any analytic variety in projective space is in fact algebraically defined. Dr. Peatfield and Prof. Zilber at Oxford University had proved a Chow type theorem in an analytic Zariski structure situation. We proved a generalization of their theorem.

The second one is to apply Richardson’s Theorem to algebraically closed fields equipped with a pseudo-exponentiation called Kex. Richardson’s theorem gives irreducible decompositions of the zero sets to a system of algebraic-exponential equations. An algebraic-exponential equation is an algebraic equation allowing finitely may exponential functions to appear in it. We proved that the same statement holds in Kex.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：数学一般・数学基礎論
キーワード：モデル理論，解析的構造，擬極小体，解析的ザリスキー幾何

１．研究開始当初の背景

代数的構造のモデル理論は華々しい成果をあげていた．とくにオックスフォード大学の Zilber 教授によって提唱された「ザリスキー幾何」と呼ばれる構造の研究によって代数幾何をモデル理論的観点から研究することが可能になっていた．

一方で解析的構造のモデル理論については，上述の Zilber 教授は「解析的ザリスキー幾何」を発表し，解析的集合の持つ性質をモデル理論的観点から研究する枠組みを提案していた．

本研究開始当初の段階で，解析的ザリスキー幾何と密接な関係が予想される「擬極小な体」の構成を考えていた．これは，それまでに板井と若井健太郎博士によって「擬極小な群」を構成していたのでその自然な発展としての問題意識であった．

また，Zilber 教授によって構成された上述の Kex と呼ばれる代数的閉体が解析的ザリスキー構造であることを肯定的に示すことを目指していた．この問題は 2007 年当時「Zilber の問題」あるいは「Zilber 予想」と呼ばれ, Peatfield 博士もこの問題に対する肯定解を与えようと模索していた．ちなみにこの問題は，2010 年 5 月 31 日現在依然として未解決である．

２．研究の目的

３つの目的がある．第一は「擬極小体の構成」，第二は「Kex が解析的ザリスキー構造」になることの証明，そして第三は「解析的ザリスキー構造」のモデル理論的性質を解明することである．

上述のように，擬極小な群がすでに構成されていたので，擬極小な体を構成するというのは自然な展開であった．実は，Zilber 教授はすでに擬極小な体を構成していたが，彼の方法は超越的手法を駆使していたので，より素朴な方法での構成を模索した．

また，解析的ザリスキー構造の具体例，特に数学的に興味深い構造を持つ具体例を探す事は「Zilber Project」として位置づけられる．この意味でも Kex が解析的ザリスキー構造であることを示すことは当時から大きな目標の一つである．この問題も現時点で未解決問題として残っている．

解析的ザリスキー構造のモデル理論は 1 階述語理論の範囲では扱えないので，モデル理論的観点からの一般論を模索することも自然な目標である．この点については，残念ながら Zilber 教授に先を越されてしまった．彼の結果をより精密化・一般化することは，今後の課題である．

３．研究の方法

オックスフォード大学における研究の動向に注意しつつ独自の視点を追求した．科研費を用いて Zilber 教授を訪ね（例年３月前後）研究打ち合わせを行った．論文として発表していないものも含めて，いくつかの研究レポートを作成した．

Zilber 教授は解析的ザリスキー構造に関して多くの論文を発表しているが，それらの論文にある，定理の証明には細部が書かれていないものも多いので，その部分を補完しなが

ら一般化の可能性を探った.

本研究の一番目の成果は，Zilber 教授らの結果の一般化から生まれたものである.

数学の研究方法として，他の多くの研究者同様以下のようなことを行った. すなわち，モデル理論の国内での研究集会の際には考察途中のアイデアを紹介し，他の研究者との討議を繰り返し解析的ザリスキー構造のモデル理論の理解および構築に努めた.

４．研究成果

１）解析的構造のモデル理論的枠組みとしては，「解析的ザリスキー構造」がよく知られている. その１つの例として，Zilber 教授とPeatfield 博士によって構成された構造があるが，この構造において大域的な解析的集合の特徴付けとして「Chowの定理」が成り立っている.

代数幾何で有名なこの定理は，射影空間における大域的な解析的多様体が実は代数的多様体であることを主張する.

Zilber教授とPeatfield博士の結果は，彼らの構成した解析的ザリスキー構造において，同様の結果が成り立つことを証明した. ただし，彼らの構造は非常に抽象的な構造であり，普通の意味での「解析性」や「代数性」といった概念がそのまま適用される訳ではない.

彼らの論法を一般化した「一般的Chowの定理」を，京都大学数理解析研究所の講究録に発表した「解析的ザリスキー構造とChowの定理」（１６０２巻、６４−６９、２００８）. このことによって，大域的な解析的集合と代数的集合の間に本質的な差がないことがわかる. ただし，上述のようにあくまで抽象的な状況での結果である.

２）Zilber教授が構成した擬極小体の一つである「擬指数関数付き代数的閉体」（以下 Kex と書く）をモデル理論的に考察する方法として，PQF位相と呼ばれる位相を導入し，その位相に関する「解析的集合」のもつ幾何学的性質について考察を行った.

すなわち，このPQF位相における，「解析的集合」の候補に相応しい集合に対して，「既約成分分解」に対応する定理が成り立つことがわかった.

この結果は，複素数体に対して成り立つ「Richardsonの定理」をKexに移植することによって得られる.「Richardsonの定理」の証明を詳細に検討すると，既約成分分解を得る操作は代数的に行われているので，その操作を機械的および形式的に実行する事でKexでの「既約分解」が得られるわけである.

しかしKexには通常の位相が定義されていないので，代数的指数関数方程式系の解集合に対するこの「既約成分分解」が，解集合の幾何的構造をどこまで明らかにしているかは今後さらに検討しなければならない.

一方残念な事に，PQF位相だけでは擬指数関数の解析的性質を表現するには貧弱であることも知られている（Zilberの注意）.

解析性の表現には「極限の表現」が不可欠になってくるが，形式的に極限を扱うにしてもPQF位相では不十分なのである. 本研究開始当初はこの点に関する理解が研究者の間で不十分であった，

Kexをモデル理論的に扱う第一歩として，この構造を解析的ザリスキー構造とみなすことが可能かという「Zilber予想」と呼ばれる問題がある. この問題に対する肯定的解答を与えるには，「極限の

表現」が不可欠なので，PQF位相より強い，すなわち閉集合がより多い位相を定義しなければならない．どのような位相の定義が適切かを決める問題は依然として未解決である．

「Richardsonの定理」がKexで成り立つ事，およびそれだけでは「Zilber予想」を解くためには不十分であるという知見を，平成２１年３月２６日に駒場東大キャンパスで開催された，日本数学会年会基礎論分科会において報告した．

平成 22 年３月１日から５日まで，鹿児島県霧島市においてモデル理論の国際研究集会が開催された．この集会において，解析的ザリスキー構造における「特殊化」と呼ばれる関数に関する考察を発表した．これは解析的ザリスキー構造のモデル理論に関する Zilber 教授の結果に関するコメントである．この「特殊化」とよばれる関数のモデル理論的性質の研究も，今後の課題として残っている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 板井昌典　解析的ザリスキー構造と Chow の定理，数理解析研究所講究録，査読無，1602 巻，2008，64-69
② 板井昌典，解析的ザリスキー構造と Hrushovski generic 構造，数理解析研究所講究録，査読無，1574 巻，2007，39-49
③ 板井昌典　非代数的ザリスキー幾何，数理解析研究所講究録，査読無，1555 巻，2007，40-48

〔学会発表〕（計４件）

① 板井昌典　Model Theory of analytic Zariski structures，日本数学会 2010 年度年会，平成 22 年３月 24 日，慶応大学
② 板井昌典　Model Theory of analytic Zariski structures, Model Theory Kirishima 2010，平成 22 年３月５日，霧島
③ 板井昌典　Kex における「解析集合」の構造に関する注意，日本数学会 2009 年度年会，平成 21 年 3 月 26 日，東京大学
④ 板井昌典 Analytic Zariski structures and a generalized Chow Theorem，平成 20 年 3 月 26 日，近畿大学

６．研究組織

(1)研究代表者

板井　昌典（ITAI MASANORI ）
東海大学・理学部・教授
研究者番号：８０２６６３６１

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし