

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2007～2008  
 課題番号：19540149  
 研究課題名（和文） 離散ラプラス作用素の反復力学系（その数理とコンピュータ・シミュレーション）  
 研究課題名（英文） Iteration dynamical system of discrete Laplacian (Its mathematical structure and computer simulation)  
 研究代表者  
 鈴木 理（SUZUKI OSAMU）  
 日本大学・文理学部・教授  
 研究者番号：10096844

研究成果の概要：結晶や花の形はどのようにしてつくられるのか？私たちの身の回りのデザインはどのようにつくられているのか？生物は誕生以来どのように進化してきたのか？また大絶滅が生じるのはなぜか？従来物理の理論をもちいて記述するのが通例であるが、これでは上のべた質問に対する答えはむずかしい。本研究では離散ラプラス作用素というものを平面格子系上に導入し、0, 1 の分布を与え離散ラプラス作用素のその時間変化を考えることによりこれらの現象を統一的に示すことができることを示す。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	200,000	60,000	260,000
2008年度	200,000	60,000	260,000
年度			
年度			
年度			
総計	400,000	120,000	520,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計学)

キーワード：離散ラプラス作用素、反復力学系、デザインの生成、古生物の進化

### 1. 研究開始当初の背景

よく知られている様にラプラス作用素は数理物理学、複素関数論においては不可欠の作用素であり、これなくして物理は語れない。実際に波動方程式、或いは熱伝道方程式はラプラス作用素により記述される。このとき波の源がホイゲンスの原理によりどのように広がるか、あるいは熱源からの熱の湧き出しがどのように広がるかその広がり方を記述する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f, \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

また2次関数の反復力学系は数学に複雑系あるいはカオスという言葉を導入し、人々に新しい世界を教えてくれた。実際、所謂ロジスティック写像の反復力学系

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$$

は $3.85 \leq a \leq 4$ ではカオス力学系となる。

本研究の動機はラプラス作用素を離散化して反復した力学系を考察するなら興味ある世界が見出されるのではないかというものである。つまり次ぎの置き換え

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f \Rightarrow \{\Delta^n f : n = 1, 2, \dots\}$$

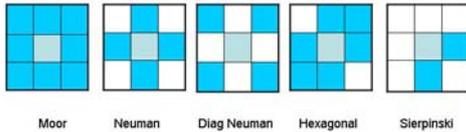
を考慮することにより、離散ラプラス作用素の反復力学系を考慮することになる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は平面に格子系を考え、湧き出し点を設定して反復力学系を考慮することによりその数学的構造及びどのような現象がこの力学系により実現されるかを考えることである。

## 3. 研究の方法

平面格子を考えこの格子点に0, 1の分布を考え、これに対して離散ラプラス作用素を次のように定める。まず近傍の概念を定める。一つの格子点に着目する。これを囲む8つの格子点の幾つかを取りこれを近傍と呼ぶ。幾つか重要な近傍を述べる。



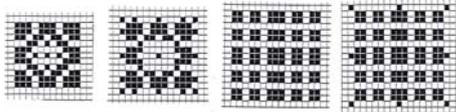
この近傍のひとつを定めると離散ラプラス作用を次のように定める：

$$\Delta_{U_p} f(p) = \sum_{q \in U_p} (f(q) - f(p))$$

ここで  $f(p)$  は0, 1の分布を表し  $U$  は近傍を表している。ここでは格子にはサイズを用意して周期条件を課して考察する。我々は次の反復力学系

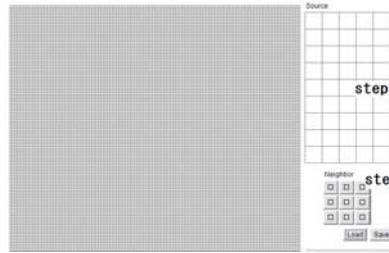
$$\{f_n\}, f_n = \Delta_U f_{n-1} (n = 1, 2, \dots)$$

を考慮する。湧き出し点を一点とし、近傍をムーア近傍としたとき、次のような分布を得る。



これを見るだけでもデザイン等の生成に寄与できるものと期待させる。

次にソフトウェアの設定について述べる。ソフトウェアは JAVA を用いる。平面に格子を実現し、湧き出しを設定して上記の離散ラプラス作用素の反復力学系を走らせシミュレーションする。近傍及び湧き出しは変更できるようにし0, 1の分布を EXCEL で表示して観察する。



実際に様々な予想が成され、これを数学的に証明する。また、実現される現象を考察することにより現象の解析を行う。

## 4. 研究成果

成果は(1)数理理論と(2)シミュレーションとに分かれる。

### (1)数理理論

我々の力学系の振る舞いは極めて多様であり現在得られている結果は極めて限られている。数理理論を述べるにあたり幾つか基本的な用語を用意する。力学系が安定であるとはあるステップ数で状態が不変になることとする。正確に述べると次のようになる：

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } f_n = f_k (\forall n \geq k)$$

また、ある状態が繰り返しあらわれるとき、この力学系を周期的という。数学的に述べると次のようになる：

$$\exists n, l \in \mathbb{N} \text{ s.t. } f_n = f_{n+kl} (\forall k \in \mathbb{N})$$

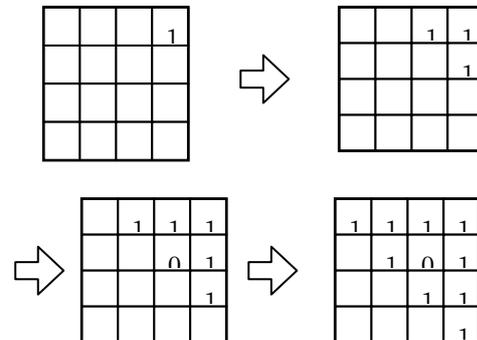
このとき  $l$  を周期という。

コンピュータ・シミュレーションによる実験をおこなうと、近傍の個数が偶数であり、湧き出しが1点の場合にはある一定のステップ数で安定状態になり、奇数の近傍のとき周期的になることが予想される。次のことが数学的に示される。

### 定理

サイズが  $2^k$  のとき、Sierpinski 近傍あるいは Neuman 近傍の場合湧き出しが一点からなるとき安定的になる。

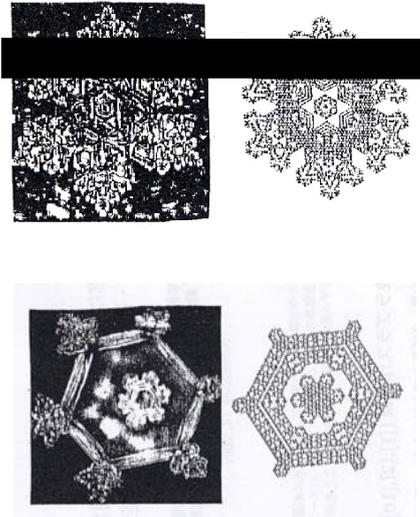
Sierpinski 近傍のとき次の考察からこの定理が正しいことが理解される。



(2)シミュレーション

ここでは幾つかその例を分野により分けて述べる。自己組織化の例として水の結晶の再現を与える。次に進化モデルとして古生物の進化、および銀河の生成を考える。最後にデザインの生成を行う。

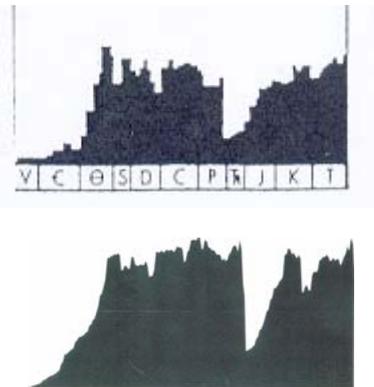
① 水の結晶



これらは近傍として Hexiagon 近傍をとり湧き出しを一点にしたものである。第一の例は驚くべき一致と言えるであろう。

② 古生物の進化

よく知られているように、カンブリア紀に多様な生物を作り出され進化競争を行っている。その後セシル紀、オルドビス紀の絶滅を経てペルモ紀の大絶滅においてはあるものは生存し70パーセントの種はこのとき絶滅したといわれている。理由は定かではないが離散ラプラス作用素の反復力学系はよくその種数の時代変化を記述する。この例を述べる。

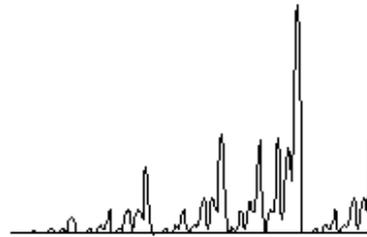
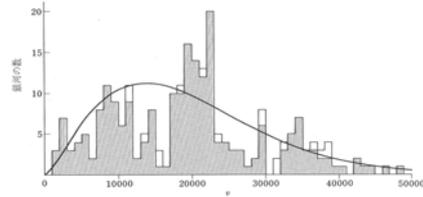


上図は棘皮動物の進化を個体数で見たものである。中間にあるPはペルモ紀をあらわし確かに絶滅が見て取れる。下図は湧き出しを一点としたときのムーア近傍により単純

にシミュレートしたものである。この類似性はどこから来るのかは解明されなくてはならないと思われる。

③ 銀河の生成

ビッグ・バンが生じて宇宙は膨張を続け僅かなゆらぎが生じて現在の銀河の分布が出来たと言われている。下図上図はその分布を一つの方角を指定して観測した際に得られる銀河の分布であり下図は奇数の近傍をとり湧き出しを一点としてシミュレートしたものである。

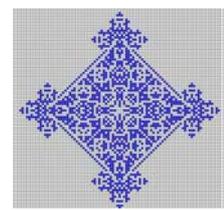
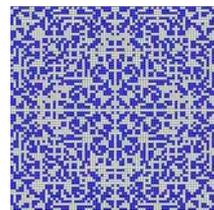


上下で方向を逆転して鏡像としてみると、ある一部分に注目するとその分布の特徴だけはよく捕らえているように見える。さらなる考察が望まれる。

④ デザインの生成

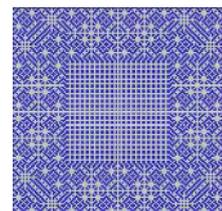
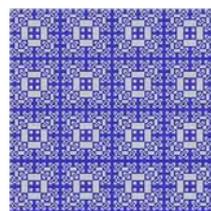
最も成功しているのはデザインの生成である。絨毯・レース・刺繍の多くのものが実現される。これについては与えられたデザインの実現マニュアルも存在する。幾つか作例を近傍の偶奇性により分けて与える。まず偶近傍の例を述べる。

(a) floral pattern (b)Diamond pattern

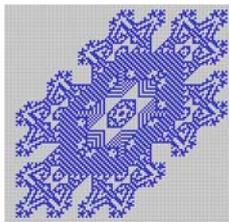


(c)Mosaic pattern

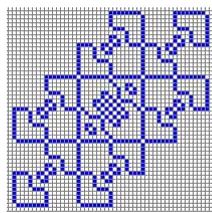
(d)Bordered pattern



(e)Crystal pattern

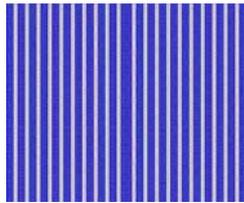


(f)Braid pattern

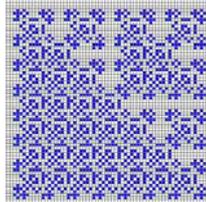


つぎに奇近傍の例を述べる。

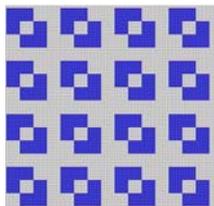
(g)Stripe pattern



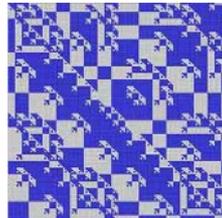
(h)Mosaic pattern



(i)Check pattern



(j)Undulate pattern



これらの幾つかの基本図形の生成を基盤にして絨毯・刺繍・レースの模様あるいは日本の伝統的な文様であるこぎん・小紋等の実現が可能である。アラビア・ヨーロッパのデザインは偶近傍が多く、日本のデザインは奇近傍で作られることが多いことに注意する。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Julian Lawrynowicz, Malgorzata Nowak-Kepeczyk, Osamu Suzuki: A duality theorem for inoculated graded fractal bundles vs. Cuntz algebras and their central extinctions, Int. Journ. of Pure and Applied Math. No3315-337(2009), 査読アリ
- ② Julian Lawrynowicz, Kiyoharu Nuno, Osamu Suzuki: Differential and integral calculus on a fractal set, Banach Center Publication, 115-140(2009) 査読アリ
- ③ Kazuo Kosaka, Osamu Suzuki : The description of mass extinction and mutation for extinction animals by use

of the iteration dynamical system of discrete Laplacian, Bull. De la Societe de Scien de Lodz, 95-107(2007), 査読アリ

- ④ Y.Makino, C.Hadlich, G. Guerlebeck, A.Kimura, Osamu Suzuki: Iteration dynamical systems of discrete Laplacian on the plane lattice, 数理解析研究所講究録 1552, 107-115(2007) 査読ナシ

[学会発表] (計1件)

- ① 八木育也, 鈴木 理: 様々な複雑なシステムの解析: 応用合同数学研究集会(龍谷大学瀬田キャンパス)、2008.12.15-17.

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 理 (SUZUKI OSAMU)

日本大学・文理学部・教授

10096844

(2) 研究分担者

濃野聖晴 (NOUNO KIYOHARU)

福岡教育大学・教育学研究科・教授

10117749

(3) 連携研究者

ナシ

