様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年１１月２２日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間： 2007 ～ 2009
課題番号：１９５４０１５８
研究課題名（和文）超幾何積分の新しい一般化の研究、モジュラー性の観点から
研究課題名（英文） Study on a new generalization of the hypergeometric integral via modular property

研究代表者
渡辺 文彦（WATANABE HUMIHIKO）
北見工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20274433

研究成果の概要（和文）：
ｎ個のテータ函数の冪積によりｎ点で分岐する局所系の(コ)ホモロジーの構造を明らかにし，これを基礎に積分論を展開するため，Wirtinger 積分およびこれの一般化で比較的計算の短いものに対し，上半平面上の函数として考えたときの微分方程式あるいはモジュラー変換の導出を行なった.コホモロジーの研究では射影空間の場合とは異なる性質が現れることが判明した.また，モジュラー変換の研究では，モジュラー群が基本群に比べより明示的に元が表示できる特性を利用して，一般モジュラー変換による一般変換則を具体的に表示した.
積分の２次元化の研究として，主偏極アーベル曲面における半周期指標つき２変数テータ函数１６個分の零点集合の配置とコホモロジーの研究をおこなっており，因子の交叉の状況，因子の補空間オイラー数，コホモロジーの基底など部分的な結果が得られているが，証明は現在進行中である.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
２００８年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
２００９年度	８００，０００	２４０，０００	１，０４０，０００
年度			
年度			
総　計	２，４００，０００	７２０，０００	３，１２０，０００

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：複素解析、特殊函数

１．研究開始当初の背景
Wirtinger は 1902 年，ガウスの超幾何函数に対しテータ函数４つの冪積による定積分表示を得た．これはラムダ函数を介して上半平面上の一価函数と考えられる．以下これを Wirtinger 積分と呼ぶ．この積分はごく最近まで超幾何函数の研究では忘れられているようであるが，この積分およびテータ函数論を基礎にした超幾何函数論の再構成，さらにはその一般化が可能ではないかと考えられる. 実際, 論文 H.Watanabe, Transformation relations of matrix functions associated to the hypergeometric function of Gauss under modular transformations, J. Math. Soc. Japan (2007), Vol. 73, 201-221.では，超幾何函数論において最も基本的である接続

公式に対し，Wirtinger 積分を用いることで，従来の境界値を利用した証明やリーマン球面上の線積分の方法による証明とは異なる，ヤコビの虚数変換公式を用いた別証明をあたえることができた．これは，従来知られてきた超幾何函数論の基本的結果がテータ函数論を基調として専ら上半平面上の議論のみでみちびかれたことを意味するわけで，これは超幾何函数の新たな観点による一般化の可能性を示唆している．以上の知見が得られたということがこの研究を開始するに至った動機となっている．

２．研究の目的

テータ函数の任意個の冪積の定積分の研究およびそのための基礎付けが研究の目的である．その際冪積に現れるテータ函数は，モジュラー群をひとつ固定したとき，この群に属するモジュラー変換で互いに置換しあうように用意することが重要である．これより，超幾何函数の従来の諸々の一般化で得られたものとはまた別な新たな特殊函数が生み出される可能性があると思われる．この観点で一般化することがなぜ重要であるかというと，Wirtinger 積分の場合に見られたように，さまざまなモジュラー群およびそれに応じて適切なテータ函数をとり積分を作れば，それから定義された函数はカスプの個数だけ確定特異点をもつフックス型線型微分方程式を満たすことが期待され，しかもこの積分の接続問題やモノドロミー問題は，この積分の一般化の仕方によりモジュラー変換によって得られるはずと考えられるからである．以上を念頭に置き，この研究では以下の４点が明らかになればよいと考えている．(i) まずテータ函数の冪積の積分定義をはっきりさせるため，付随するコホモロジー（およびホモロジー）を基底の決定込みで計算しこれらのペアリングとして積分を定義すること．(ii) テータ函数の冪積の積分が上半平面上の変数の微分に関してみたす微分方程式を作ること．(iii) この積分に対する接続問題やモノドロミー表現を与えること．言い換えればモジュラー変換公式を作るということ．(iv) このような積分で定義された函数の特殊函数的性質．あるいは積分の高次元化．

３．研究の方法

まず Wirtinger 積分の一般化としてのテータ函数の冪積の積分の定義を明確にする必要がある．Wirtinger 積分に対するホモロジーコホモロジーの研究として H. Watanabe, Twisted homology and cohomology groups associated to Wirtinger integral, J. Math. Soc. Japan, Vol. 59, 2007, 1067-1080 がある．これは４点で分岐する局所系係数の（コ）ホモロジーの研究であるが，ここで行なわれている手法は，４点より多い点で分岐する局所系に対する（コ）ホモロジーに容易に一般化可能な形をしている．

つぎにテータ函数の冪積の積分のみたす微分方程式を作ることが問題となる．このためには複数のテータ函数間の加法公式を確立して必要がある．これより，テータ函数の導函数の入った微分関係式を導くことができる．これを用いれば例えば Wirtinger 積分の場合に従来の超幾何函数論を用いることなくテータ函数論の範囲内で微分方程式の導出が可能になると考えられる．

テータ函数の冪積の積分のモノドロミーや接続問題は，テータ函数の有限集合に置換で作用するモジュラー群に関するモジュラー変換則を求めるということに同じである．

Wirtinger 積分の場合は論文 H.Watanabe, Transformation relations of matrix functions associated to the hypergeometric function of Gauss under modular transformations, J. Math. Soc. Japan (2007), Vol. 73, 201-221 においてモジュラー変換の導出を行なった．ここでの手法が一般化された場合でも応用可能であると考えられる．また，この論文ではモジュラー群の生成元に対する変換を与えたが，モジュラー群の一般元に対する変換則の導出もこれに基づき導出される．

さらに，高次元への一般化の基礎を与えるために，アーベル曲面上の上のテータ因子の配置を考え，その因子上で分岐する局所系係数の（コ）ホモロジー論およびコホモロジー論を研究する．この研究における難所は Deligne により確立されたいわゆる比較定理のとくに消えないコホモロジー群の構造の研究であるが，これに対しては無限回微分可能性の範疇ながら Leray の Le calcul differentiel et integral sur une variete analytique complexe(1959)における留数理論が有効ではないかと考える．

以上の研究を実行するため日常的には数学書または数学論文を参照しつつ計算用紙と筆記用具を用いて研究を行なった．また研究の途中から研究の方向性が密接に関連している琉球大学助教眞野智行氏に連携研究者として参加してもらい以上にあげた研究方法の一部につき関与していただいた．

４．研究成果

４つのテータ函数の冪積により４点で分岐する局所系のコホモロジーの構造は，極が最大で４点で次数が５である有効因子となるような 1-form のなすコホモロジーとの同型であることが証明された．通常（例えば射影空間における研究で）この種の研究をする場合，Deligne の比較定理を使用するが，

Deligne の証明には一部ギャップがあるらしいというううわさがある．この研究ではトーラス上比較定理に当たる事実を Mittag-Leffler の定理を用い函数論的に自前で与えた．考えているコホモロジーの次元はリーマン・ロッホの定理から算出できるので，あとはこの４点（次数は５）で極をもつような基底を楕円函数論を用いて具体的に与えた．この際，青本，喜多，野海氏らによる射影空間から超平面配置をのぞいた局所系のツイストコホモロジーの研究結果と異なるところは，コホモロジーの基底としては対数極をもつものだけでは足りず，１点において位数２の極をもつ 1-form が必要なことであり，これが射影空間上にはないトーラス特有の現象である．これは論文 H. Watanabe, Twisted homology and cohomology groups associated to Wirtinger integral, J. Math. Soc. Japan, Vol. 59, 2007, 1067-1080 の内容である．以上の結果はｎ点分岐に一般化され，眞野氏との共同研究によれば，モジュラス変数１変数をもつ Chern 類が０である直線束をテータ函数の冪積の局所系にテンソルした層（このテンソルには解析的背景がある）を係数とする（コ）ホモロジーの研究をおこない，モジュラス変数が消えていないときはコホモロジー基底としてはすべて対数的なものが取れるが，モジュラス変数を０に極限を取ると，コホモロジー基底に変形が起こり，単独点で位数２のベクトルが生じることもわかった．これは論文 T.Mano, H.Watanabe, Twisted cohomology groups associated to the Riemann-Wirtinger integral, 京都大学数理解析研究所プレプリント 1641 (2008), 13 pages の内容である．以上の研究は１次元複素トーラス上のｎ点分岐の最も一般な局所系に対する（コ）ホモロジーの構造に関する基本定理を与えており，今後トーラス上の積分を研究する際の基礎となる．

Wirtinger 積分の満たす微分方程式の導出（超幾何函数論に基づかないもの）では，ツイストコホモロジーの観点に立ち，テータ函数の加法公式から広田微分により得られる微分関係式およびテータ定数のみたす Halphen 方程式を用いることで導出が可能なことが判明した．これは，超幾何函数を上半平面上１価函数として取り扱う上での基礎となる．以上は論文 H.Watanabe, Linear differential relations satisfied by Wirtinger integrals, Hokkaido Math. J., 38 (2009), 83-95 の内容である．

さらに Wirtinger 積分に対し，一般モジュラー変換による一般変換則を具体的に表示した．これは基本群の「一般元」に対する一般モノドロミー行列の表示を与えていると考えられ，モノドロミーの生成行列の積による方法とは別に被積分函数の解析接続とホモロジーサイクルの適当な分解に基づく新たな導出法と考えられる．これは論文 H. Watanabe, On the general transformation of the Wiritinger integral, 北海道大学数学教室プレプリント 928 (2008), 27 pages の内容である．モジュラー変換に現れる係数は指数函数の複雑な和の形であらわされるが，このような量がガウス和やデデキント和のような特殊な有限和の値の算出の理論と関連があるのかないのか興味がある．

Wirtinger 積分の一般化については，上記の Wirtinger 積分の場合の微分方程式やモジュラー変換の導出の考え方を発展させ，眞野氏によりいくつか興味深い例が算出された．いくつかの例が眞野智行「レベル３の Wirtinger 積分から得られるフックス型方程式について」数理解析研究所講究録 1662 に見られる．

高次元化の研究として，主偏極アーベル曲面における半周期指標つき２変数テータ函数１６個分の零点集合の配置とコホモロジーの研究をおこなっており，部分的な結果が得られつつある．各テータ函数の零点は種数２非特異曲線であって，各曲線上に異なる他の曲線が交わってくる点が６点ある．このような点は全部で１６点あり各点には６本の曲線が集中する．このような配置をもつ空間のオイラー数は１１２と算出され，これにより，１６個のテータ函数の零点を除いた空間上の局所系係数コホモロジーについて消えないコホモロジー H^2 の次元が定まると考えられる．また H^2 の基底については現在のところ基底の候補があがっている段階でこれらが基底であるかどうかの証明は現在進行中である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

1. H. Watanabe, Twisted homology and cohomology groups associated to Wirtinger integral, J. Math. Soc. Japan, Vol. 59, 2007, 1067-1080.

2. H.Watanabe, Linear differential relations satisfied by Wirtinger integrals, Hokkaido Math. J., 38 (2009), 83-95

3. H. Watanabe, On the general transformation of the Wiritinger integral, 北海道大学数学教室プレプリント 928 (2008), 27 pages

4. T.Mano, H.Watanabe, Twisted cohomology groups associated to the Riemann-Wirtinger integral, 京都大学数理

解析研究所プレプリント 1641 (2008), 13 pages.
5. 眞野智行「レベル３の Wirtinger 積分から得られるフックス型方程式について」数理解析研究所講究録 1662.

〔学会発表〕(計３件)
1. 渡辺文彦, Wirtinger 積分のモジュラー変換則について, 日本数学会秋季総合分科会, ２００７年９月２４日東北大学.
2. 眞野・渡辺, Riemann-Wirtinger 積分に付随するツイスト・コホモロジー群の構造について, 日本数学会秋季総合分科会, ２００８年９月２４日, 東京工業大学.
3. 眞野・渡辺, Wirtinger 積分のレベル３に対する一般化について, 日本数学会年会, ２００９年３月２６日, 東京大学.

〔図書〕(計０件)
〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
渡辺　文彦 (WATANABE HUMIHIKO)
北見工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20274433

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
眞野智行 (MANO TOSHIYUKI)
琉球大学・理学部・助教
研究者番号：60378594