様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年６月１日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2008
課題番号：19540161
研究課題名（和文）　熱方程式の解を保つ変換の研究

研究課題名（英文）　The research of caloric morphism

研究代表者
下村　勝孝（SHIMOMURA KATSUNORI）
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：00201559

研究成果の概要：
温度分布の変化を表す方程式は熱方程式と呼ばれ、物理学に由来し数学においても極めて重要である。この研究では、どちらも回転面状に曲がった二つの空間の上で、ある場所での熱方程式の解を別の場所での熱方程式の解に移す変換を具体的に調べ、中核となる変換の形を完全に決定した。一方、今後の進展に必要となる、曲がっていない空間上の波動方程式の解に対する変換についても調べ、3 次元以上で変換の形を完全に決定した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・解析学
キーワード：熱方程式の解を保つ変換、caloric morphism、Appell 変換、熱方程式

１．研究開始当初の背景

従来、調和関数を保つ変換の研究は、Harmonic morphism という形で、特にリーマン多様体上で、偏微分方程式、微分幾何、ポテンシャル論の各側面から、活発に研究されている。一方で、熱方程式の解を保つ変換については、古典的な Appell 変換だけがよく知られ、熱方程式の解の研究、特に正値解の研究に大きな役割を果たしてきたが、Leutwiler が注意するまでは何も一般的考察は行われていなかった。リーマン多様体、半リーマン多様体の場合にも一般的な特徴付けも含め何も知られておらず、ユークリッド空間の場合も、次元が異なる場合には何も知られていなかった。

以上の研究動向の中で本研究、熱方程式の解を保つ変換の研究、を始めた。熱方程式の解を保つ変換については、Leutwiler が次元の等しいユークリッド空間の場合を扱った研究があるのみであり、本研究は新しいテーマを開くものである。また本研究は、応用を意識して変換の具体的な形を求めることを目標とする点で、調和関数を保つ変換の場合の研究よりも一歩踏み込んだものである。

これまでにユークリッド空間上の熱方程式の解を保つ変換と、平行してリーマン多様体、半リーマン多様体上の熱方程式の解を保つ変換についても研究し、これまでに大きな進展があった。
次元が異なるユークリッド空間の間の変換

について、写像が時間座標毎には多項式写像で、かつ時間座標の変換が実解析的である場合に、変換の形を具体的に、完全に決定し、それらは全て Appell 変換の直和であることを示した。

一方で、Appell 変換を、半ユークリッド空間の場合にも拡張して、次元が等しい場合に変換の形を、具体的に完全に決定した。結果は、双方の空間の計量の型が同じまたは反対でなければならず、変換は全て、相似変換と、Appell 変換と、反転との合成で書ける、というものである

リーマン多様体、半リーマン多様体上の間の熱方程式の解を保つ変換については、最初に一般論として、ユークリッド空間の場合を拡張する形で変換の特徴付け定理を得た。

一般論に関連して、多様体上の変換について、リーマン多様体の場合と半リーマン多様体の場合の違いを明らかにするために具体例を考察し、半リーマン多様体上の熱方程式を保つ変換で、時間変数の向きが逆転する例と、時間変数の変換と空間的拡大率が空間変数に依存する例を発見した。この結果により、変換の性質の中で「時間変数変換と空間拡大率が空間変数に依存しない」と「時間変数の向きは不変」とは、多様体のラプラシアンが楕円型であることによることが分かった。また、多様体の張力場との関係を調べ、変換の特徴付けの方程式が、重み付き張力場による熱方程式と同じであることが分かった。

次に、リーマン多様体の具体的な場合として、原点を除いたユークリッド空間の動径方向リーマン計量に関する熱方程式を保つ変換を調べ、一般の回転不変なリーマン計量の場合と関連付けて調べた。Appell 変換の直接の拡張の場合には、具体的に形を決定した。その中に、ユークリッド空間では存在しない興味深い例を得た。

半リーマン多様体の場合の具体的な重要例として、計量退化集合を除いた半ユークリッド空間の動径方向半リーマン計量に関する熱方程式の解を保つ変換を調べ、Appell 変換の直接の拡張の場合に、形を決定することができた。また、諸係数をうまく選べば、Appell 型変換の間には、計量のべき指数によって連続的にパラメータ付けが出来ることが判った。

それらの結果を元に、3 次元以上の場合には、ユークリッド空間上の回転不変計量に関する、熱方程式の解を保つ変換を完全に決定出来た。

２．研究の目的

本研究の目的は、熱方程式の解を保つ（熱方程式の解を再び熱方程式の解に写す）変換に関する問題を、ポテンシャル論と実解析的手法を用いて、さらに広く深く、新しい進展を得ることである。研究分担者が各自で専門分野での研究を進めながら、「変換の形を具体的に決定する」をキーワードにして、有機的関連を持つ共同研究を行う。得られた具体的な変換を用いて、領域を別の領域に写像し、熱方程式のマルチン境界、熱方程式の解の境界挙動や拡張可能性に応用することも目的としている。

３．研究の方法

今回はリーマン多様体、半リーマン多様体上の間の熱方程式の解を保つ変換について、変換の形を具体的に決定出来て、かつ一般論を構築していく上で指針となりそうな、具体的な多様体の上で、熱方程式の解を保つ変換の形を完全に決定することを目指した。前の研究で得た、多様体上の変換の特徴づけ定理で与えられた方程式を、空間に対する幾何学的考察を加味した上で、ポテンシャル論的方法、実解析学的方法、微分方程式論的方法を用いて詳しく調べ、方程式の解を求めて、変換の形を具体的に決定するという方法で研究を進めた。特徴づけ定理から推測されるように、熱方程式の解を保つ変換には制約条件が多く課せられるので、かなり一般の場合にも変換の形を具体的に決定出来ると思われるが、現在の所では大きな指導原理や作業仮説の様なものは存在しないため、今回のような個々の具体的な多様体で得られた結果から帰納的に類推して、一般論構築を行うというのを、研究方法の全体構想としている。今回の研究もその全体構想の一つのプログラムを実行したものである。

４．研究成果

別々の計量が入った二つの半ユークリッド空間のそれぞれから、計量が退化する集合を除いた上で連結成分を取って得られる二つの領域を考える。その二つの領域に、さらに別々の動径関数で重みを付けた動径方向半リーマン計量が与えられた場合に、熱方程式の解を保つ変換を調べて、中核となる型の変換の形を完全に決定した。結果を論文にまとめて、現在投稿中である。与えられた計量が同じである場合に帰着させる方法で、同様の結果を以前に得て論文にまとめたが、この方法では、同じ計量の場合に外せなかった技術的な条件である、写像の定義域と値域が交わる、を回避することが出来なかった。そこで方法を改めて、同じ計量に帰着するのではなく、変換の形を直接決定する方法で証明を進めたところ、技術的条件を回避することができた。これにより、却って同じ計量の場合の結果も、技術的な条件なしのきれいな形にすることが出来た。これは今までの結果から単に場合を拡張するだけでなく、前の結果をも改善することが出来たという点で、大きな

意義があった。得られた結果は、時間に関して一定ではない変換が存在するための必要十分条件は、重み関数が動径のべき乗であり、かつべきが同じであるか、－2 に関して対称でなければならないというもので、－2 に関して対称な場合だけ、空間的な反転の変換が存在する。この結果は、なぜ同じ計量の場合には、べきが－2 の場合だけに空間的な反転の変換が存在するのか、という疑問に明確な答えを与えている。

この結果から、動径方向計量を回転不変、あるいは半ユークリッド計量保存群で不変な計量に変えて、空間が 3 次元以上の場合に変換の形を具体的に決定する方向で研究を進めたが、非正定値計量で最も基本的なローレンツ計量の場合でも、等角写像に関する Liouville の定理が、そのままでは拡張出来ないことに気付き、一時方向転換をして、波動方程式の解を保つ変換を考察してみることにした。

熱方程式の解を保つ変換と同じ形で、波動方程式の解を保つ変換を定式化し、ユークリッド空間上の場合について調べ、３次元（空間次元２）以上の場合に形を完全に決定した。結果を現在論文にまとめているところである。調和関数を保つ変換の場合のアナロジーで出来る部分までは、すでに結果があったが、波動方程式の解を保つ変換の場合は、ローレンツ計量を考えるのが自然であるが、このローレンツ計量にはユークリッド計量の場合には表れないタイプの等角写像が存在するため、その形を調べるのが最大の課題であった。今回、うまく具体的に形を決定することが出来た。この結果は、上記の半ユークリッド計量保存群で不変な計量に関する熱方程式の解を保つ変換の研究に直接役立ち、また広く半リーマン多様体上の熱方程式の解を保つ変換の研究に役立つと考えられ、重要である。一方で、波動方程式の解を保つ変換を調べるという、新しい研究へのステップとしても意義があり重要である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）
①安藤広、堀内利郎、Missing terms in the weighted Hardy-Sobolev inequalities and its application、Journal of Mathematics of Kyoto University、巻頁未定、2009 印刷中、査読有

②西尾昌治、鈴木紀明、山田雅博、A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman spaces、Hokkaido Mathematical Journal、巻頁未定、印刷中、査読有

③西尾昌治、鈴木紀明、山田雅博、Weighted Berezin transformations with application to the Toeplitz operators of Schatten class on the parabolic Bergman spaces、Kodai Mathematical Journal、巻頁未定、印刷中、査読有

④西尾昌治、鈴木紀明、山田雅博、Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces、Hiroshima Mathematical Journal、38、177-192、2008、査読有

⑤西尾昌治、鈴木紀明、山田雅博、Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces、Potential Analysis、28、357-378、2008、査読有

⑥堀内利郎、Kato's inequalities for degenerate quasilinear elliptic operators、Kyungpook Mathematical Journal、48、15-24、2008、査読有

〔学会発表〕（計８件）
①西尾昌治、鈴木紀明、山田雅博、放物型 Bergman 空間における指数 1 以下の Schatten 族 Toeplitz 作用素の特徴付け、日本数学会 2009 年度年会、2009 年 3 月 28 日、東京大学

②下村勝孝、Liouville type theorem associate with the wave equation、RIMS 研究集会「ポテンシャル論とその関連分野」、2009 年 2 月 18 日、京都大学

③下村勝孝、異なる動径方向計量を持つ半ユークリッド空間の間の Caloric morphism、ポテンシャル論研究集会、2008 年 11 月 3 日、秋田大学

④堀内利郎、On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities involving Critical and Supercritical weights、日本数学会 2008 年度秋期総合分科会、2008 年 9 月 24 日、東京工業大学

⑤西尾昌治、鈴木紀明、山田雅博、Toeplitz operators of Schatten class on parabolic Bergman spaces、日本数学会 2008 年度秋期総合分科会，2008 年 9 月 24 日、東京工業大学

⑥西尾昌治、菱川洋介、山田雅博、A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman spaces、日本数学会 2008 年度秋期総合分科会、2008 年 9 月 24 日、東

京工業大学

⑦西尾昌治、鈴木紀明、山田雅博、Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces, 2008年度日本数学会年会、2008年3月24日、近畿大学

⑧下村勝孝、Caloric morphism for rotation invariant metric on Euclidean spaces、Finland-Japan Joint Seminar on Analysis、2007年8月29日 ヘルシンキ大学

６．研究組織

(1)研究代表者

下村　勝孝 (SHIMOMURA KATSUNORI)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：00201559

(2)研究分担者

堀内　利郎 (HORIUCHI TOSHIO)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：80157057

西尾　昌治 (NISHIO MASAHARU)
大阪市立大学・理学研究科・准教授
研究者番号：90228156

安藤　広 (ANDO HIROSHI)
茨城大学・理学部・講師
研究者番号：60292471

(3)連携研究者

鈴木　紀明 (SUZUKI NORIAKI)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：50154563