

平成21年 5月22日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2008

課題番号：19540162

研究課題名（和文） 位相的手法による非線型境界値問題の研究

研究課題名（英文） Study of nonlinear boundary value problems by topological methods

研究代表者

平良 和昭（TAIRA KAZUAKI）

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授

研究者番号：90016163

研究成果の概要：

多次元マルコフ過程の境界値問題についての研究成果によって、半線型楕円型方程式に対する退化型ロバン境界条件の場合に、ルレイ・シャウダーの写像度理論及びシャウダーの不動点定理に代表される位相的な手法を用いることが初めて可能となった。この手法は、古典的な変分法と組み合わせることで極めて強力な武器を提供し、個々の問題を、ディリクレ境界条件及びロバン境界条件を含む退化型ロバン境界値問題として統一的に取り扱うことができる。変分法を適用するに当たっての本質的な着眼点は、藤田宏・加藤敏夫にその源を持つ解析的半群の分数巾を考える点にある。具体的な研究成果として、アマン・ヘス、アンブロゼッチ・プロディ、アンブロゼッチ・マンチーニ、バーガー・ポドラック、カツダン・ワーナー、ランデスマン・レイザー等による従来の様々な非線型問題に対する先行研究を、統一的手法により、境界条件が退化する場合に一般化することができた。下記の学術論文①,④,⑤及び著書①は、本研究課題の2年間の研究成果である。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2008年度	1,700,000	510,000	2,210,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：関数解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：(1)非線型境界値問題 (2)位相的手法 (3)変分法 (4)逆関数定理 (5)写像度 (6)不動点定理 (7)フェラー半群 (8)解析的半群

## 1. 研究開始当初の背景

(1)『マルコフ過程の境界値問題』：この研究テーマは、確率論における多次元マルコフ過程の境界値問題を偏微分方程式論及び関数解析学の立場から総合的に研究することを目的としている。この問題は、1次元の場合、

フェラー、ディンキン、マッキーン、伊藤清等によって解析的にも確率論的にも完全に解明されているが、多次元の場合は、解析学における重要な研究課題であるにも拘らず、1次元の場合と比べると、現在も完全な解明からは遠い状態にある。1970年代の多次元マ

ルコフ過程の境界値問題の主流は、池田信行、渡辺信三等を中心とする確率微分方程式的手法に依る研究であった。

(2) 工学・医学における『弾性体の逆問題』: 弾性体とは、外部からの力に対して形が変わる物体の総称であり、ゴム、建造物や人体などがその典型的な例である。連続体力学における非線型弾性体方程式は、材料力学、機械工学、土木工学において基本的な方程式である。弾性体の逆問題とは、性質の分からない弾性体が与えられたとき、その表面で得られる何らかの観測データから、弾性体の性質を決定する問題である。例えば、トンネルの表面での打音検査によるコンクリート内部の空洞あるいは亀裂調査、地球表面上の石油探査等の非破壊検査、触診による人体内の疾患の検査等は、逆問題の代表的な例である。

(3) 『非線型楕円型境界値問題の一般論』: 研究代表者は、数理生態学、化学及び工学における非線型問題について、数値解析を視野に入れて、多角的に研究を行ってきた。主たる数学的手法として、無限次元版の陰関数定理に基づく非自明解の分岐理論を援用し、特に、実際の応用上からも重要であるパラメータに関する非自明解の分岐の様子、正值解の個数、定常解の安定性の問題について研究を行った。例えば、化学反応速度論では、アレニウスの法則とニュートンの冷却の法則をみたく『化学反応物に対する燃焼問題』を考察し、活性化エネルギーが十分小さい場合には、化学反応は連続的であって爆発現象が起こることはないが、活性化エネルギーが十分大きい場合には、酸素と化学反応物の比率に応じて、不連続に爆発が起きたり、起こらなかったりするという化学実験データの数学的な証明を与えた。その証明においては、確率論における多次元マルコフ過程の境界値問題を詳しく考察した研究成果が本質的な役割を果たした。一方、アマン・ヘス(1979年)、アンブロゼッチ・プロディ(1972年)、アンブロゼッチ・マンチーニ(1979年)、バーガー・ポドラック(1975年)、カツツダン・ワーナー(1975年)、ランデスマン・レイザー(1970年)等による従来の様々な非線型問題に対する先行研究を統一的な手法により研究することが、非線型楕円型境界値問題の一般的研究の立場から期待されていた。

## 2. 研究の目的

(1) 『多次元マルコフ過程の境界値問題』: この研究は、確率論における多次元マルコフ過程の境界値問題というミクロスコピックな問題を、関数解析学のマクロスコピックな手法及び偏微分方程式論のメゾスコピックな手法を用いて研究することである。その際、拡散方程式に対する境界値問題の各種の定量的な十分条件を、確率論のブラウン運動と

いう具体的なイメージを通じて直観的に解釈し、このような方向から各種の十分条件の必要性を定性的に探ることによって、解析学本来の研究を深めることも目指している。

(2) 工学・医学における『弾性体の順問題』: 本研究の目的は、非線型弾性体方程式に対する逆問題を研究するための準備として、順問題を考察する際に基本的な役割を果たす解の一意存在定理を証明することである。

(3) 『非線型楕円型境界値問題の一般論の構築』: 本研究の目的は、半線型楕円型方程式に対する退化型ロバン境界条件の場合に、ルレイ・シャウダーの写像度理論及びシャウダーの不動点定理に代表される位相的な手法を用いて、非退化な境界条件の場合に得られていた従来の種々の結果を、統一的に証明することである。

## 3. 研究の方法

(1) 『多次元マルコフ過程の境界値問題』: 本研究では、確率論の『多次元マルコフ過程の境界値問題』を関数解析学における『フェラー半群の存在問題』として捉えて、最新の偏微分方程式的手法及び関数解析的手法を援用することに依り、従来の確率微分方程式的手法よりも一般のヴェンツェル型境界条件について詳しく考察する。その基本的な手法は、1960年代後半にヘルマンダーによって発展させられた、古典的なポテンシャル論の現代版である擬微分作用素の理論である。さらに、最近になって、研究代表者は、不連続な係数を持つ楕円型積分微分作用素に対するマルコフ過程の境界値問題の研究には、本質的にフーリエ変換に立脚する擬微分作用素の理論よりも、1950年代にカルデロンとジグムントによって創始された、古典的なポテンシャル論の不連続係数版である特異積分作用素の理論の方が適していると考えられるようになった。

(2) 工学・医学における『弾性体の順問題』: 非線型弾性体方程式に対する順問題を考察する際に基本的な役割を果たす解の一意存在定理を証明することであるが、確率論におけるマルコフ過程の境界値問題を研究する際に有効であったアイデアを出発点にする。その実解析学的色彩の強い証明においては、擬微分作用素系に対するベソフ空間における有界性定理が本質的な役割を果たす。

(3) 『非線型楕円型境界値問題の一般論』: 多次元マルコフ過程の境界値問題についての研究成果によって、半線型楕円型方程式に対する退化型ロバン境界条件の場合に、ルレイ・シャウダーの写像度理論及びシャウダーの不動点定理に代表される位相的な手法を用いることが初めて可能となった。この手法は、古典的な変分法と組み合わせることで極めて強力な武器を提供し、個々の問題を、デ

イリクレ境界条件及びロバン境界条件を含む退化型ロバン境界値問題として統一的に取り扱うことができる。変分法を適用するに当たっての本質的な着眼点は、藤田宏・加藤敏夫にその源を持つ解析的半群の分数巾を考える点にある。

#### 4. 研究成果

(1) 『多次元マルコフ過程の境界値問題』: 下記の著書①では、確率論の『多次元マルコフ過程の境界値問題』を関数解析学における『フェラー半群の存在問題』として捉えて、最新の偏微分方程式的手法及び関数解析的手法を援用することに依り、従来の確率微分方程式的手法よりも一般のヴェンツェル型境界条件について詳しく考察した。基本的な手法は、1960年代後半にヘルマンダーによって発展させられた、古典的なポテンシャル論の現代版である擬微分作用素の理論である。さらに、応用として、半線型放物型方程式の初期値・境界値問題を、藤田宏・加藤敏夫にその源を持つ解析的半群の分数巾の理論を使って、時間に関する局所的解の一意存在定理を証明した。また、下記の学術論文①では、実解析学の分野においてカルデロンとジグムントによって創始された特異積分作用素の理論を援用して、著書①の結果を不連続な係数を持つ楕円型積分微分作用素の場合に拡張した。学術論文①は、確率論のマルコフ過程構成の問題を、関数解析的手法及び実解析的手法によって研究したものであって、本研究の学術的特色及び独創的な点が良く現れている。

(2) 工学・医学における『弾性体の順問題』: 非線型弾性体方程式に対する逆問題を研究するための準備として、下記の学術論文⑤では、無限次元版の陰関数定理及び擬微分作用素系に対するベースフ空間における有界性定理を適用して、順問題を考察する際に基本的な役割を果たす解の一意存在定理を証明した。

(3) 非線型楕円型境界値問題の『一般論の研究』: 下記の学術論文④及び論文[1]~[6]において、ルレイ・シャウダーの写像度理論及びシャウダーの不動点定理の位相的な手法を有効に利用して組織的に研究を行った。扱った非線型項の形は、大きく分けて、次の3つの場合に分類される:

① 可逆な線型項を持ち、漸近的に線型な場合: ペロンにその源を持つ優解・劣解の方法を利用するが、その際、シャウダーの不動点定理が重要な役割を果たす。また、応用上からも重要であるパラメータに関する解の個数を調べるには、ルレイ・シャウダーの写像度の理論を使う。(論文[1],[3],[5],[6])

② 固有値と一致する可逆ではない線型項(共鳴項)を持つ場合: リャープノフ・シュ

ミットの直交分解及び無限次元版の大局的逆関数定理を使う。(論文[4])

③ 非対称な非線型項を持つ場合: 特異点を持つ場合に拡張された無限次元版の大局的逆関数定理を使う。この場合は、パラメータに関する解の個数について、完全に分類できる。(論文[2])

[1] Multiple solutions of semilinear degenerate elliptic boundary value problems, *Mathematische Nachrichten*, 283 巻(2010年), 出版予定

[2] Degenerate elliptic boundary value problems with asymmetric nonlinearity, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 62 巻(2010年), 出版予定

[3] Multiple solutions of semilinear degenerate elliptic boundary value problems II, *Mathematische Nachrichten*, 投稿中

[4] Semilinear degenerate elliptic boundary value problems at resonance, *Mathematische Annalen*, 投稿中

[5] Degenerate elliptic boundary value problems with asymptotically linear nonlinearity, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 投稿中

[6] Triple solutions of semilinear degenerate elliptic boundary value problems, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 投稿中

上記の論文[1]~[6]は、本研究課題「位相的手法による非線型境界値問題の研究」の将来の発展に繋がる研究成果である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計17件)

① Kazuaki Taira, On the existence of Feller semigroups with discontinuous coefficients II, *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, 25 巻 5 号 (2009年), 715 頁~740 頁, 査読有

② Kazuhiro Kawamura and T. Miura, On the root closedness of continuous function algebras, *Topology and Applications*, 156 巻 2 号 (2009年), 624 頁~628 頁, 査読有

③ Hiroyuki Tasaki, O. Ikawa and T. Sakai, Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 61 巻 2 号 (2009年), 437 頁~481 頁, 査読有

④ Kazuaki Taira, Degenerate elliptic boundary value problems with

- indefinite weights, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 5 卷 2 号 (2008 年), 133 頁~162 頁, 査読有
- ⑤ Kazuaki Taira, Introduction to boundary value problems of nonlinear elastostatics, *Tsukuba Journal of Mathematics*, 32 卷 1 号 (2008 年), 67 頁~138 頁, 査読有
- ⑥ Katsuro Sakai, The spaces of compact convex sets and bounded closed convex sets in a Banach space, *Houston Journal of Mathematics*, 34 卷 1 号 (2008 年), 289 頁~300 頁, 査読有
- ⑦ Katsuro Sakai and W. Kubis, Hausdorff hyperspaces of  $\mathbb{R}^n$  and their dense subspaces, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 60 卷 1 号 (2008 年), 193 頁~217 頁, 査読有
- ⑧ Katsuro Sakai and K. Mine, Open subsets of LF-spaces, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics*, 56 卷 1 号 (2008 年), 25 頁~37 頁, 査読有
- ⑨ Tamotu Kinoshita and K. Yagdjian, On the Cauchy problem for wave equations with time dependent coefficients, *International Journal of Applied Mathematics & Statistics*, 13 卷 1 号 (2008 年), 1 頁~20 頁, 査読有
- ⑩ Tamotu Kinoshita, P. D'Ancona and S. Spagnolo, On the 2 by 2 Weakly Hyperbolic Systems, *Osaka Journal of Mathematics*, 45 卷 1 号 (2008 年), 1 頁~19 頁, 査読有
- ⑪ Kazuhiro Kawamura, N. Brodskiy, J. Dydak and A. Karasev, Root closed function algebras on compacta of large dimensions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 35 卷 2 号 (2007 年), 587 頁~596 頁, 査読有
- ⑫ Kazuhiro Kawamura and T. Miura, On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations, *Topology and Applications*, 154 卷 2 号 (2007 年), 434 頁~442 頁, 査読有
- ⑬ Tamotu Kinoshita, D. Del Santo and M. Reissig, Energy estimates for strictly hyperbolic equations with low regularity in coefficients, *Differential and Integral Equations*, 20 卷. 8 号. (2007 年). 879 頁~900 頁, 査読有
- ⑭ Tamotu Kinoshita, D. Del Santo and M. Reissig, Klein Gordon type equations with a singular time dependent potential, *Rendiconti Universita Trieste*, 39 卷 1 号 (2007 年). 141 頁~175 頁, 査読有
- ⑮ Kenichiro Umezū, Positive solutions of semilinear elliptic eigenvalue problems with concave nonlinearities, *Advances in Differential Equations*, 12 卷 12 号 (2007 年), 1415 頁~1436 頁, 査読有
- ⑯ Kenichiro Umezū, Blowing up of principal eigenvalues for Neumann boundary conditions, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A*, 137 卷 2 号 (2007 年), 567 頁~579 頁, 査読有
- ⑰ Atsushi Yagi, Dynamical systems for forest kinematic model, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 66 卷 1 号 (2007 年), 275 頁~288 頁, 査読有
- [学会発表] (計 3 件)
- ① 酒井 克郎, 嶺 幸太郎: 単体複体と LF-空間の開集合, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, 東京工業大学大岡山キャンパス, 2008 年 9 月 26 日
- ② 梅津健一郎: A super and subsolution method for sublinear problems with low regularity coefficients, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, 東京工業大学大岡山キャンパス, 2008 年 9 月 25 日
- ③ 酒井 克郎, 嶺 幸太郎: Open subsets of LF-spaces, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 東北大学川内北キャンパス, 2007 年 9 月 23 日
- [図書] (計 1 件)
- ① Kazuaki Taira, Boundary value problems and Markov processes, *Lecture Notes in Mathematics*, 1499 号, Second Edition, Springer-Verlag, 196 頁, 2009 年, 査読有
- [その他]  
ホームページ等  
<http://ocw.tsukuba.ac.jp> (筑波大学オープンコースウェア)
6. 研究組織  
(1) 研究代表者  
平良 和昭 (TAIRA KAZUAKI)  
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授  
研究者番号: 90016163
- (2) 研究分担者  
川村 一宏 (KAWAMURA KAZUHIRO)  
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授  
研究者番号: 40204771  
酒井 克郎 (SAKAI KATSURO)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・  
准教授

研究者番号：50036084

田崎 博之 (TASAKI HIROYUKI)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・  
准教授

研究者番号：30179684

木下 保 (KINOSHITA TAMOTU)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・  
准教授

研究者番号：90301077

梅津 健一郎 (UMEZU KENICHIRO)

茨城大学・教育学部・准教授

研究者番号：00295453

### (3) 連携研究者

八木 厚志 (YAGI ATSUSHI)

大阪大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：70116119

宮地 晶彦 (MIYACHI AKIHIKO)

東京女子大学・文理学部・教授

研究者番号：60107696