

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2008
 課題番号：19540164
 研究課題名（和文） 再生核の理論のチホノフ正則化法への応用
 研究課題名（英文） Applications of the theory of reproducing kernels to the Tikhonov regularization
 研究代表者
 齋藤 三郎（SAITOH SABUROU）
 群馬大学・大学院工学研究科・教授
 研究者番号：10110397

研究成果の概要：再生核の理論をチホノフ正則化法に適用して、相当一般的なヒルベルト空間上の作用素方程式の数値解析的な解法を確立して、典型的な例として 難問として有名なラプラス実逆変換の数値解析的解法に 藤原宏志氏などと成功して、国内及び国際特許の申請を済ませるまで 研究を進める事が出来た。他方、山田正人氏などと非線形システムの同定と逆を確立する新しい数学的な理論をある程度構成することに成功した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード：再生核の理論、再生核、チホノフ正則化法、数値解析、計算機、ラプラス変換
 非線形連立方程式、システムの同定と逆

1. 研究開始当初の背景

齋藤は、スタンフォード大学流の具体的な再生核の理論を始めとして一般論や応用に関する再生核の理論の広い分野を研究テーマとし、ここ 35 年来、一貫して研究を行ってきた。その関連論文は 140 編を越え、英文研究著書も 2 冊出版し、再生核理論の専門家として国際的に活躍している。Applicable Analysis など 15 を越える国際雑誌の編集員を務めている。約 5 年前、熱伝導における逆問題への数値解析的なアプローチとして、チホノフの正則化法に再生核の理論を適用する考えを得た。そのようなとき、機械工学

の松浦氏が共同研究に加わり、具体的な公式の数値計算に成功し、更に計算機画面上に結果を表現することにも成功し、これらの歴史的な成功に刺激されて、いろいろな逆問題からの理論の精密化を図るとともに、現実的な計算アルゴリズムの構築を目指して共同研究することとなった。松浦氏は学生時代より、数理工学を専攻し、甘利俊一教授（東大名誉教授、現在は理化学研究所、脳科学統合研究センター・センター長）のもとで、神経回路網の数理や統計的学習理論、非線形最適化問題、パターン認識、サポートベクタマシン、独立成分分析などに関する研究を行って

来ていて、数理工学の幅広い基礎を有している。それで、我々はこれらの立場からの具体的な問題への精力的なアプローチを始めることとなった。そして約5年前、我々は歴史的に難問とされてきた熱伝導における逆問題について、この方法を適用し、新しい陽表現公式を確立した。さらに我々は、得られた逆公式を用いて、任意時刻に任意温度分布を実現する初期温度分布を算定するアルゴリズムを開発し、コンピュータによる数値実験を行い、この方法とアルゴリズムの妥当性を確認することに成功した。そしてその成果を ISAAC (International Society for Analysis, its Applications and Computation) の第4回国際会議 (2003年8月、カナダ、トロント) にて報告した。その後、逆問題における難問として有名な実逆ラプラス変換の数値解析的な解法も 藤原宏志氏と澤野嘉宏氏の協力を得て成功し、そのソフトの原理、装置を京都大学と群馬大学の共願で特許の申請を19年夏申請し、20年夏 J S T の補助により国際特許の申請を済ませ、工学などへの応用の研究を進めている。

2. 研究の目的

この成功は大きな反響をよんでおり、既に外国の数学者が引用し、関連論文の執筆も始められている。ここで、この成功を数学的な原理に基づいて触れるならば、関数の解析性を計算機で捕らえることに成功したと言えるもので、さらに、数学の解析の結果を計算機に載せるための新しい離散化法を与えるもので、我々の開発した方法論には汎用性・普遍性があり、一般のヒルベルト空間上の有界作用素方程式の新しい解法を与え、偏微分方程式や逆問題等に広汎に適用できるものである。そこで、我々はこの方法・手法を、非適切性などで従来解くことが困難とされ

てきた他の逆問題や変係数の常微分方程式、偏微分方程式にも適用して解の表示を導出しようと考えた。そして具体的に数値計算が可能なアルゴリズムを構築し、数値計算で具体的な解を得てそれをコンピュータ画面上に表示することによって我々の方法の新規性、汎用性、有効性を明らかにしたいと考えた。特に従来、方程式の非適切性により解くことが困難とされてきた、医学や工学における複雑な境界値問題を具体的に現実的な時間内で計算できるアルゴリズムを開発し、逆問題解法のブレイクスルーを目指した。

すでに我々の方法を適用した例としては、1) 過剰境界・初期条件の下での非斉次常微分方程式の解の近似構成法、2) 熱伝導における逆問題、3) 非斉次波動方程式の逆問題、4) ラプラス変換の実逆変換の計算法、5) 複雑な境界条件を満たすポアソン方程式の近似解の構成などがある。その成果は本申請書に記してあるものに加えて、審査を通り掲載が決定されている数編の論文に纏めて公表してきた。どの問題も従来難問とされているが、我々の提案した方法が問題解決のきっかけとなり、海外の数学者や数理工学者が我々の論文を引用し、新しい応用を見出して論文にしている。特に、ラプラス変換の実逆問題は尚難しい問題であるが、機械工学や石油工学など広い分野に具体的な応用があるので、重点的に取り組んで行く考えであった。この問題も本質は計算機で関数の解析性を捕らえられるかの問題や解析接続を計算機で具体的に出来るかの興味深い、深い問題に関係している。

3. 研究の方法

計算機環境の整備と数値実験

本研究で補助金を頂いた場合には、直ちにコンピュータ式 (デュアルCPU, 大容量メモリ搭載) を導入し、強力な数値計算体制

を整える。そして、既に我々の理論を用いて得ている幾つかの逆公式（解析的積分表示は得てはいるが計算環境・計算時間の制約のため数値計算による検証を行い得なかったケース）について数値実験を行い、我々の理論とアルゴリズムの妥当性を検証する。理論的には解の一意性、一様収束性、及び誤差評価は証明済みであるので問題は無いと思われるが、数値実験の結果、妥当でないものが得られた場合は、アルゴリズムの検討、見直しも行う必要がある。具体的な応用や解析接続には大きな計算を必要としているので、計算機の能力の向上が求められる。特に、研究分担者の計算機環境に比べて、著しく劣っているため、非常に不便な状況にあった。

本方法の適用範囲の拡大とアルゴリズムの開発、成果の発表

チホノフの正則化と再生核の理論を結びつけた我々の理論や、解空間をペーリー・ウィナー空間に限定した場合には、従来、非適切性等により解くのは不可能と考えられてきた様々な逆問題への応用が可能であることが判明している。既に幾つかの典型的な偏微分方程式や常微分方程式への適用は完成しているが、さらに範囲を広げ、変係数の常微分方程式や、より難しく現実に応用できる逆問題を扱う。またそれぞれの逆公式に対し、現実的な時間で計算可能で誤差累積の少ないアルゴリズムを開発する。この時点での研究結果を3回の国内学会（日本応用数学会、日本数学会2回）、ISAAC 国際会議（2009年7月にイギリスで開催）で発表する。その他3、4件の関係ある国際会議に招待されているので、1、2件絞って出席し、成果を発表したい。特に逆問題や偏微分方程式の専門家との研究交流を深める。

差分法、有限要素法、境界要素法など従来の手法との比較

現在我々の扱っている（扱おうとしている）逆問題の一部には、差分法、有限要素法、境界要素法等を用いて（強引に解こうと思えば）計算できるものもある。これらの従来からの諸方法は非適切問題には適用不可能であり、陽表現を得ている我々の方法の優位性は明らかだが、従来のこれらの手法による計算結果と比較して、解の精度、計算機への負担、拡張性、汎用性などの観点から我々の方法の優位性を具体的に明らかにしたい。他の方法についてもそれらは永い伝統があるので、関係専門家との交流を深めて、方法の長所などの検討を行う。

部分境界値を与えた場合のディリクレ問題の調和関数の再構成アルゴリズムの開発

理論上は、ある区間での関数と法線微分値を与えれば、もとのラプラス方程式の解は一意に決定されるはずであるが、現在までこれに挑戦した論文は多いが、これを具体的に効率的に解いた成功例は無い。我々の方法は、任意の境界線上の境界値に対しての解の構成アルゴリズムを与えることができる手法であり、この困難な問題にも適用できるはずである。この歴史的な難問に対して、我々の方法を適用し、数値解の構成アルゴリズムを確立し、その有効性を示したい。ただし、この問題の数値解析は、計算の手間、データの記憶容量の点から、かなりハードなことが予想され、補助金で充実化を図ったような計算機環境が必須となる。

医学、工学などにおける複雑な境界値を持つ逆問題への本方法の適用と数値実験

医学や工学（特に材料科学等）においても、境界値問題としての複雑性と非適切性により従来解くことが困難であるとされてきた多くの問題がある。また機械学習理論や多変量統計学の分野にも、同じ理由で解くことをあきらめられた重要な問題群がある。これら

の問題に我々の手法を適用し、どこまで本質に迫った解を見出せるかを検討する。特に、研究分担者（松浦）が群馬大医学部と手がけてきた、脳内磁場データから脳内活性を推定する問題（MEG）に適用し、従来の多変量解析的手法（因子分析、主成分解析）や独立成分解析（ICA）等による推定結果と比較し、本方法が有効に働くことを示したい。もしこのことが成功すれば、再生核理論の医療の現実問題に対する具体的適応という意味で、大きな反響を呼ぶものと考え。この結果を（我々にとっては今まで異分野であった）医用工学や画像解析などに関する学会で発表し、それらの分野の研究者にも再生核理論の有用性を認識していただくことが、我々の一つの夢でもある。

成果の発表と著書の出版

各年度も前年度と同様に、春・秋の日本数学会において我々の結果を発表する。また日本応用数理学会でも発表し続ける予定である。さらに、その他年間5、6件の関係ある国際会議に招待されているので、1、2件に絞って出席し、成果を発表したい。本課題が採択された場合、補助金の一部をこれらの国内外の学会への旅費と別刷り代の一部に使用したい。また、本手法をひとつのまとまりのある新しい実用可能な理論として完成させ、我々の方法とそこから得られる結果を学部程度の学生にも理解してもらえるような形で出版したい（まず、英文著書を考えている。）。本格的な学術書を澤野嘉宏氏と出版を計画していて既に、英文で104ページになっている。研究期間内に完成できると考えている。このためにも補助金を有効に利用したいと考えている。これは、研究代表者である齋藤が著した Integral transforms, reproducing kernels and their applications (Addison Wesley Longman,

1997), 「再生核の理論入門」(牧野書店, 2002年) の続編となるもので、現実的な問題に我々の方法を適用し計算するための良い手引書にもなるようにと計画しており、現在すでに構想し、準備にとりかかっている。しかし、良い計算結果や計算機による良い図を得るためによい計算機を必要としている。すなわち、学部生、理工科系と数学の専門家向けの2冊の本を出版して、再生核の理論を大成させたい。

4. 研究成果

藤原宏志氏たちとラプラス変換の実逆変換の応用と数値解析的な完成を目指して、研究を進めてほぼ完成の域にまでもって行き、国際特許の申請まで済ませる事ができた。さらに、博士課程の学生 山田正人氏と

(1) 2次元実数空間の区分的に滑らかな境界を持つ有界領域上の向きを保つ写像の逆写像に対して、その積分表現公式を与えた。特に、像領域が凸集合のとき、本公式は Arctan 関数と定義域の境界の座標の midpoint で表され、境界上の写像の微分値が不要となることを示した。また、本公式は複素微分にグリーン公式を適用して得られる一般化されたコーシーの積分公式を用いて導出されることを示した。さらに、いくつかの数値実験例を提示し、本公式は、単連結でない有限個の区分的に滑らかな閉曲線で囲まれた領域で定義された関数やヤコビアンがゼロになる場合などの関数にも有効に適用できることを示した。

(2) 一般の n 次元実数空間の区分的に滑らかな境界を持つ有界領域上の向きを保つ写像の逆写像に対して、その積分表現公式を与えた。本公式は、異なる方法で導出された一変数関数、二変数関数の公式を統一することを示した。さらに本公式は、ポアソン方程式の解の積分表示から得られる公式を含むこ

とを示した。さらにいくつかの数値実験例を提示し、本公式の有効性を示した。

(3) 再生核と Tikhonov 正則化を用いることにより、物理的実験データに基づく線形システムの新しい逆公式を与えた。特に、本方法は、線形システムに何の解析的な仮定を置かず、物理的実験データのみを用いて、線形システムの近似逆を求める方法で一般的で、大きな線形方程式を解く事に帰着される方法であるが、線形システムを陰に定めるのに入力として再生核を用いる新しい一般的な方法を用いている。どの様な再生核を用いるかは物理的なシステムに依存するもので、具体的な適用には実験と経験を必要とする要素を含んでいる。

さらに 澤野嘉宏氏たちと

(4) ポテンシャル積分作用素に対するいくつかの不等式を考察した。さらに逆写像の積分表現公式に現れる特異積分に対し、数値計算の観点から考えられる自然な正則化に対し誤差評価を与え、その数値実験例を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Sawano Yoshihiro; Fujiwara, Hiroshi; Saitoh, Saburo, Real inversion formulas of the Laplace transform on weighted function spaces. *Complex Anal. Oper. Theory* 2 (2008), no. 3, 511--521. 査読有
- ② Saitoh, Saburo, Theory of reproducing kernels---Applications to approximate solutions of bounded linear operator equations on Hilbert spaces. (Japanese) *Sūgaku* 60 (2008), no. 3, 248--271. 査読有
- ③ Yamada, Masato; Saitoh, Saburo. Identifications of non-linear systems. *J.*

Comput. Math. Optim. 4 (2008), no. 1, 47--60. 査読有

- ④ Fujiwara, Hiroshi; Matsuura, Tsutomu; Saitoh, Saburo. Sawano Yoshihiro; Real inversion of the Laplace transform in numerical singular value decomposition. *J. Anal. Appl.* 6 (2008), no. 1, 55--68. 査読有
- ⑤ Matsuura, Tsutomu; Al-Shuaibi, A.; Fujiwara, Hiroshi; Saitoh, Saburo; Sugihara, Masaaki., Numerical real inversion formulas of the Laplace transform by using the sinc functions. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 27 (2007), no. 1, 1--14. 査読有
- ⑥ Saitoh, Saburo. Tikhonov regularization and the theory of reproducing kernels. *Cubo* 9 (2007), no. 3, 65--74. 査読有
- ⑦ Itou, Hiroshi; Saitoh, Saburo. Analytical and numerical solutions of linear singular integral equations. *Int. J. Appl. Math. Stat.* 12 (2007), No. D07, 76--89. 査読有
- ⑧ Yamada Masato; Matsuura, Tsutomu; Saitoh, Saburo Representations of inverse functions by the integral transform with the sign kernel. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 10 (2007), no. 2, 161--168. 査読有
- ⑨ Matsuura, Tsutomu; Al-Shuaibi, A.; Fujiwara, Hiroshi; Saitoh, Saburo. Numerical real inversion formulas of the Laplace transform by using a Fredholm integral equation of the second kind. *J. Anal. Appl.* 5 (2007), no. 2, 123--136. 査読有

- ⑩ Matsuura, Tsutomu; Saitoh, Saburo.
Analytical and numerical solutions of the inhomogeneous heat equation. J. Concr. Appl. Math. 5 (2007), no. 3, 237--254. 査読有
〔学会発表〕(計 8 件)
- ① 山田正人, 齋藤三郎, 連立非線形方程式の解の具体的な表現について, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, 東京, 2008.9.26
- ② 山田正人, 齋藤三郎, 非線形写像の逆写像の積分表現, 日本応用数学会 2008 年度年会, 東京, 2008.9.26
- ③ 齋藤三郎, 山田正人, Identification of non-linear systems, 日本数学会 2008 年度年会, 大阪, 2008.3.26
- ④ 齋藤三郎, 山田正人, 非線形システムの逆について, 日本数学会 2008 年度年会, 大阪, 2008.3.26
- ⑤ 齋藤三郎, 藤原宏志, ラプラス変換の実逆変換の困難性と克服について, 東北大 日本数学会, 2007.9.23
- ⑥ 齋藤三郎, 山田正人, Practical inversion formulas for linear systems, ISAAC Ankara Congress, アンカラ, トルコ, 2007.8.15
- ⑦ 齋藤三郎 Applications of reproducing kernels to numerical analysis through the Tikhonov regularization, SEAMS-GMU International Conference, インドネシア, Yogyakarta, 2007.7.25
- ⑧ 齋藤三郎, Analytical and numerical inversion formulas in the Gaussian convolution by using the Paley-Wiener spaces, Third International Conference on Computational and Harmonic Analysis, 上海, 中国, 2007.6.21
〔産業財産権〕
- 出願状況 (計 2 件)

①名称: 逆ラプラス変換プログラム、逆ラプラス変換のためのテーブル作成、プログラム、逆ラプラス変換の数値解算プログラム、および逆ラプラス変換装置

発明者: 藤原宏志, 齋藤三郎, 松浦 勉
権利者: 国立大学法人群馬大学、国立大学法人京都大学

種類: 番号: PCT/JP2008/064453

出願年月日: 平成 20 年 8 月 12 日

国内外の別: 国外

②名称: 逆ラプラス変換プログラム、逆ラプラス変換のためのテーブル作成プログラム、逆ラプラス変換の数値解算プログラム、および逆ラプラス変換装置

発明者: 藤原宏志, 齋藤三郎, 松浦 勉
権利者: 国立大学法人群馬大学、国立大学法人京都大学

種類: 番号: 特願 2007-210946 号

出願年月日: 2007.8.13

国内外の別: 国内

〔その他〕

ホームページ等

https://univ-db.media.gunma-u.ac.jp/public/main.php?gakubu=31000&gakka=31800&kouza=31830&q=&btnS=%E6%A4%9C%E7%B4%A2&pid=res_search_list

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤 三郎 (SAITOH SABUROU)
群馬大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 10110397

(2) 研究分担者

松浦 勉 (MATSUURA TSUTOMU)
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号: 80181692