

平成 22 年 5 月 20 日現在

研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540166
 研究課題名(和文) 非有界領域における楕円型及び放物型ポテンシャル論の研究とその確率解析的考察
 研究課題名(英文) Research of the potential theory for elliptic type or parabolic type in unbounded domains and its consideration in stochastic analysis
 研究代表者
 宮本 育子 (MIYAMOTO IKUKO)
 千葉大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号：00009606

研究成果の概要(和文)：非有界領域における楕円型及び放物型ポテンシャル論の研究が目的であった。楕円型すなわちラプラスの方程式の解(調和関数)について、無限遠点での近傍での解の性質に現れる希薄集合についての定性的性質と定量的性質を考察した。放物型すなわち熱方程式の解(temperature)について、調和関数について得られていることに対応する結果がどのようになるか、まだほとんど未解決である。しかし公理的にやる糸口ができた。

研究成果の概要(英文)：Our aim was to research the potential theory for the elliptic type or the parabolic type in unbounded domains. In our study of the behavior of the solutions (harmonic functions) of the elliptic type differential equations i.e. Laplace equations in the neighbourhood of the point at infinity, we could consider qualitative properties and quantitative properties of thin sets on the complimentary sets of which the solutions behave very regularly. But the problems analogous to the solutions (temperatures) of the parabolic type differential equations i.e. heat equations could be almost unsolved except the problem about “the sets of determinations”.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析

1. 研究開始当初の背景

楕円型偏微分方程式の解である調和関数については多くの研究があり、我々もたくさんの結果をえている。しかし、放物型偏微分

方程式の解である熱解については、研究がまだほとんどなされていない。N. A. Watson の Classes of subtemperatures on infinite strips, Proc. London Math. Soc.,

(3) 27 (1973), 723-746 や Ransova の一連の論文がある程度である。ここ数年とりかかっている。調和関数の解の構成、解の性質については半空間、コーン、シリンダーで結果を出している。ストリップやもっと一般の領域で考察をはじめた。熱解では、スラブ上である種の解の性質を考察はじめた。

2. 研究の目的

本研究では非有界領域での楕円型及び放物型偏微分方程式の解のポテンシャル論的研究を対象とします。何故非有界領域かといえば、例えばディリクレ問題に関しては、有界領域の場合には解の一意性がありますが、非有界領域の場合には、境界で 0 になる解を加えることによって無数の解がえられます。このように、有界領域の場合と非有界領域の場合とは状況が大変に違って、有界領域の場合とは違った困難さがあります。

(1) 楕円型すなわちラプラシアン (調和関数) に関しては、半空間、コーン、シリンダーについてはこれまでの研究で、既に十分な結果が得られているので、ストリップ上でのディリクレ問題について考える。特殊解の積分表示は既に得られているので、一般解の問題を解決する。ディリクレ問題以外の境界条件であるノイマン問題、混合問題について、考える。ラプラシアン以外の楕円型偏微分方程式について考える。また解の性質については無限遠点の近傍での解の性質に現れる希薄集合の研究は、ポテンシャル論では capacity に代表される重要な研究である。ここでは関数の値分布の研究とポテンシャル論の研究が融合する分野に現れる希薄集合についてその定性的性質と定量的性質を考える。

(2) 熱方程式の解 temperature に関しては、ディリクレ問題について得られていることに対応する結果がどのようになるか、まだほとんど未解決で、Taibleson, Watson に少し結果がある程度である。ディリクレ問題の解の積分表示がポアソン積分で表現できるのに対応して、熱方程式の解 temperature はガウス-ワイヤストラス積分で表現できる。ポアソン核ほどガウス-ワイヤストラス核はわかっていない。解の性質についても、調和関数では、Beurling's minimum principle、determination の問題等を研究してきたので、熱方程式の解についても同様のことを研究したい。この種の研究は今始まったばかりであると言ってよい。

3. 研究の方法

本研究では非有界領域での楕円型及び放物型偏微分方程式の解の研究を対象とします。楕円型については、多くの結果をすでに得ているので、楕円型でいえたことが放物

型ではどの程度成り立つかを研究する。それには、次の(1)-(5)の問題を考えなければなりません。

- (1) どんな非有界領域で考えるか
- (2) 境界条件と解の存在との関係
- (3) 解が存在する場合の特殊解の積分による具体的構成の問題
- (4) 一般解の具体的構成とある種の解の一意性の問題
- (5) 無限遠点の近傍での解の性質

従って、
(A) 非有界領域の熱方程式の解 temperature の特殊解の積分表示を得る。
(B) つぎに一般解を得るために、境界で 0 になる temperature とはどんなものかを決定することが問題となる。そのためには N. A. Watson の Classes of subtemperatures on infinite strips, Proc. London Math. Soc., (3) 27 (1973), 723-746 が参考になる。熱方程式の解 temperature の積分表示に現れるガウス-ワイヤストラス核をある種のフーリエ級数に展開することが必要で、フーリエ解析の深い研究が必要になる。

(C) 得られた結果の確率解析の意味、確率解析的手法による別証明を考察する。

(D) 調和関数の無限遠点の性質については Beurling's minimum principle、determination の問題等が解決されたので、熱方程式の解に対しても、この種の性質が成立することを証明する。これには Ransova の論文が参考になる。

このために国内、国外の偏微分方程式等の研究者から有益な情報を得るために、積極的に内外の研究集会等に出席する。また、得られた研究結果は研究集会等で積極的に公表発表し、全国、全世界の研究者と意見を交換する。

4. 研究成果

非有界領域における楕円型及び放物型ポテンシャル論の研究が目的であった。

(1) 楕円型すなわちラプラスの方程式の解 (調和関数) について

無限遠点での近傍での解の性質に現れる希薄集合の研究は、ポテンシャル論では capacity に代表される重要な研究である。ここでは、関数の値分布の研究とポテンシャル論の研究が融合する分野に現れる希薄集合である minimally thin sets, rarefied sets 及びそれらを含む a -minimally thin sets ($0 \leq a \leq 1$) についての定性的性質と定量的性質を考察した。

① 定性的性質については、Essen 等による、半空間における希薄集合を判定するウイナーの判定条件がある。これを前回の研究課題でコーンに拡張したが、今回別の非有界領域シリンダーに拡張すること

ができた (Two criteria of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cylinder, Hokkaido Math. J., 36(2007), 507-534.)。

- ② 定量的性質について、Essen-Jackson-Rippon は半空間内の無限遠点での minimally thin な集合に対して、その集合をある条件を満たす可算個の球で被覆出来ることを証明した。それを、コーン内の無限遠点での minimally thin な集合に対して拡張精密化した。この定理の証明は、Essen-Jackson-Rippon の方法とは異なり、Azarin に類する方法、すなわち、Besicovitch の被覆定理を利用する方法をとった。この方法のほうがわかりやすい。また、Stein による Whitney cubes の列で定数倍の不等式をみたくもなく、境界の近さによって、細かい Whitney cubes の列を使ったのは独創的である (On a covering Property of Minimally thin sets at infinity in a cone, Advances Appl. Math. Sci., 1(2009), 361-380)。
- ③ 上のコーンに対する結果をシリンダーで考察した。どちらも非有界領域であるが、ケルビン変換するとはっきりするが、異なる非有界領域である。コーンでは、無限遠点が角を持つ領域の角の点であるが、シリンダーでは、尖点を持つ領域の尖点である。異なっているのにかかわらず、ほぼ同様に議論を進めていくことができ同様の結果を得た (On a covering Property of Minimally thin sets at infinity in a cylinder, Mathematica Montisnigri, 21(2008), 35-54)。
- ④ Aikawa は、半空間内の無限遠点での minimally thin な集合が 1-minimally thin な集合になり、rarefied な集合が 0-minimally thin な集合になるような a -minimally thin ($0 \leq a \leq 1$) な集合の概念を導入して、minimally thin な集合を細分した。Essen-Jackson-Rippon, Aikawa は半空間の a -minimally thin な集合の被覆定理を証明した。我々は、それをコーンに拡張精密化した (On a -minimally thin sets at infinity in a cone, Hiroshima Math. J., 37(2007)61-80)。
- (2) 放物型すなわち熱方程式に関して
① 調和関数に関して、Gardiner が導入した、sets of determination の問題がある。調和関数に関しては、いままでにたくさんの結果があるが、熱方程式に関しては Ranosova の一連の結果しかない。このことに関して、公理的に解決しようとしている。その糸口を IWPT2009 で講演した

(International Workshop on Potential Theory 2009)。

② 論文 Caloric morphism for rotation invariant metric が Hiroshima Math. J. に出る。

(3) 確率解析的考察に関して

① 確率過程でその時空間相関関数が行列式で表すことができるものを行列値過程という。ダイソン模型と呼ばれる長距離相互作用粒子系はその典型的な例である。従来は、平衡分布などの特別な初期条件のもとでの行列値過程の存在と解析が行われてきたが、共同研究により、ダイソン模型などは、一般の初期値の下でも行列値過程であることを示すことができた。この結果により模型の解析に新しい手法を与えることができ、粒子数を無限にしたときに非平衡な無限粒子系に収束、緩衝現象の導出など物理的にも重要な結果を導くことができた。(Commun. Math. Phys. 293, 2010)

② 粒子数を無限にしていくに従って増大するドリフトを加えることにより、また別の非平衡無限粒子系を構成することができ、その緩衝現象などを示すことにも成功した。(J. Stat. Phys. 136, 2009)

③ 上の2つの無限粒子系は、平衡である場合のバルク尺度極限、ソフトエッジ尺度極限で平衡ダイソン模型から得られる平衡無限粒子系にそれぞれ対応している。つまり、非平衡系の初期値を平衡分布で平均をとると平衡系が得られるのである。このことにより、いままで未解決であった平衡系のマルコフ性などの性質を示すことができた。一般化として、非衝突ベッセル過程に対しても同様な結果が得ている。この場合、平衡系でハードエッジ尺度極限で得られる無限粒子系に対応している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件) (すべて査読有)

- (1) M. Nishio, K. Shimomura, Caloric morphism for rotation invariant metric, Hiroshima Math. J. 40 (2010) (to appear)
- (2) M. Katori, H. Tanemura, Non-equilibrium dynamics of Dyson's model with an infinite number of particles, 293 (2010) 469-497.
- (3) I. Miyamoto, H. Yoshida, On a covering Property of Minimally thin sets at infinity in a cone, Advances Appl. Math. Sci., 1(2009), 361-380
- (4) M. Katori, H. Tanemura, Zeros of Airy function and relaxation process, J. Stat. Phys., 136 (2009) 1177-1204.
- (5) I. Miyamoto, H. Yoshida, On a covering

Property of Minimally thin sets at infinity in a cylinder, *Mathematica Montisnigri*, 21(2008), 35-54

(6) I. Miyamoto, H. Yoshida, On α -minimally thin sets at infinity in a cone, *Hiroshima Math. J.*, 37(2007) 61-80

(7) I. Miyamoto, Two criteria of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cylinder, *Hokkaido Math. J.*, 36(2007), 507-534.

(8) M. Katori, H. Tanemura, Noncolliding Brownian motion and determinantal processes, *J. Statist. Phys.*, 129(2007) 1233-1277

(9) M. Katori, H. Tanemura, Infinite Systems of Non-Colliding Generalized Meanders and Riemann-Liouville Differintegrals, *Probab. Th. Rel. Fields*, 138(2007), 113--156

[学会発表] (計 25 件)

(1) 宮本育子, 吉田英信, A result of Azarin and rarefied sets at infinity in a cone (Analysis Seminar(バル・イラン大学)) 2009 年 10 月

(2) 吉田英信, Sets of determination for harmonic functions in an abstract harmonic space, *International Workshop on Potential theory* 2009 年 9 月(北大)

(3) 下村勝孝, Liouville type theorem associate with the wave equation, *International Workshop on Potential Theory* 2009, (北大) 2009 年 9 月

(4) 香取眞理, 種村秀紀, Noncolliding processes and Random Matrices, *ボン・パスツールセンター*, 2009 年 7 月

(5) 香取眞理, 種村秀紀, Non-equilibrium dynamics of determinantal processes with infinite particles, *京都大学理学研究科*, 2009 年 2 月

(6) 香取眞理, 種村秀紀, Non-equilibrium dynamics of Dyson's model, *忠北国立大学*, 2009 年 1 月

(7) 下村勝孝, 波動方程式の解を保つ変換について, *名城大学ポテンシャル論セミナー*, 2008 年 12 月

(8) 香取眞理, 種村秀紀, Infinite Dyson's model, *Stochastic Analysis on Large Scale Interacting System*, *東京大学大学院数理学研究科大講義室*, 2008 年 11 月

(9) 香取眞理, 種村秀紀, Dyson's model with infinite particles, *京都大学数理解析研究所* 2008 年 11 月

(10) 宮本育子, 吉田英信, Qualitative or quantitative properties of minimally thin sets at infinity on a cone, (Analysis

Seminar(モスクワ大学)) 2008 年 10 月

(11) 宮本育子, 吉田英信, シリンダー内の無限遠点での minimally thin な集合の定量的な特徴付け(日本数学会秋季総合分科会(東工大)) 2008 年 9 月

(12) 下村勝孝, Caloric morphism : Transformation preserving the solutions of heat equation, *Analysis Seminar*, *Charmars 工科大学*, 2008 年 3 月

(13) 宮本育子, 吉田英信, Property of Minimally thin sets at infinity in a cylinder, (Analysis Seminar(モンテネグロ大学)), 2008 年 2 月

(14) 宮本育子, 吉田英信, コーン内の無限遠点での minimally thin な集合の定量的な特徴付け(日本数学会秋季総合分科会(東北大)) 2007 年 9 月

(15) 宮本育子, 吉田英信, On a covering property of minimally thin sets at infinity in a cylinder (フィンランド・日本合同解析セミナー) 2007 年 8 月

(16) 下村勝孝, Caloric morphism for rotation invariant metric on Euclidean spaces, 2007 Finland-Japan Joint Seminar on Analysis, 2007 年 8 月

(17) 下村勝孝, R^n ($n \geq 3$) の回転不変計量に関する caloric morphism, *日本数学会年会*, 2007 年 3 月

(18) 宮本育子, 吉田英信, コーン内の α -minimal な集合の被覆定理(ポテンシャル論研究集会(千葉大)) 2007 年 1 月

ホームページ等

<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮本 育子 (MIYAMOTO IKUKO)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00009606

(2) 研究分担者

種村 秀紀 (TANEMURA HIDEKI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40217162

下村 勝孝 (SHIMOMURA KATUNORI)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：00201559

吉田 英信 (YOSHIDA HIDENOBU)
千葉大学・名誉教授
研究者番号：60009280

(3名とも H20, H21 は連携研究者)

(3) 連携研究者

