様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年５月２３日現在

機関番号：１３７０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2007 ～ 2010
課題番号：19540176
研究課題名（和文） 概均質ベクトル空間と超局所解析の研究
研究課題名（英文） Studies on prehomogeneous vector space and micro-local analysis

研究代表者
室 政和（MURO MASAKAZU）
岐阜大学・工学部・教授
研究者番号：70127934

研究成果の概要（和文）：
概均質ベクトル空間のゼータ関数を超局所解析の立場から捉えることで，さまざまのゼータ関数に関する結果を導いた．実際には可換放物型の概均質ベクトル空間に関する試行的な計算を行った．そのほか，連携研究者によって超局所解析に関連する研究が行われた．

本研究で目的としてきたことは，①概均質ベクトル空間上の不変超関数の決定と解析，②ゼータ関数の関数等式と留数の研究への応用，③概均質ベクトル空間上の不変微分方程式の解析，の３点である．これらは概均質ベクトル空間の中の基本的な問題の中のいくつかのものである．その意義は次のようになる．以下，順を追ってその意義と研究成果を述べる．

不変超関数の決定と解析について我々はすべての基本的な既約概均質ベクトル空間について，その上の不変超関数の決定を目標としている．概均質ベクトル空間では，群の作用が強く働くので，その上の不変な関数は非常に強く限られている．最初に佐藤幹夫が概均質ベクトル空間についての理論を発表したとき，彼の動機とその目的は定数係数の偏微分作用素（特にラプラシアン）の基本解を多項式の複素べきから構成する方法の拡張をすることであった．ラプラシアンは偏微分作用素のうちでももっとも基本的なものであり，この解は調和関数として物理学の現象解析に重要な役割をはたす．

この解を求める方法の一つに基本解を求めることがある．ラプラシアンで基本解を求める一つの方法が多項式の複素べきを利用することである．微分作用素を多項式の複素べきに作用させると b-関数と呼ばれる複素べきのパラメータの多項式が複素べきにかかって出てくる．この b-関数がゼロになるところに注目すると，この点における複素べきはパラメータに関して極を持つ．したがって，この極のまわりでローラン展開を行うとその主要部には係数としていくつかの超関数があらわれる．この超関数の特徴は，もとの多項式がゼロでないところにサポート（台）を持つことで，これを特異超関数という．特に，もっとも重要な特異超関数はデルタ関数と呼ばれ，その台は１点（ベクトル空間の場合は原点）だけに集中する．基本解とは，偏微分作用素を作用させたときに結果として現れる超関数がデルタ関数になる超関数のことである．この超関数が求まることによって，どのような関数であっても偏微分作用素を作用させたときの解を積分によって書くことができるようになる（解の積分表示）．

基本解を求める方法はいろいろあるが，この方法の特徴は多項式の複素べきという具体的なものから基本解が直接計算できることである．この目的のためには，多項式の複素べきに偏微分作用素を施すことによってそれが b-関数と複素べきの積になるような多項式を見出すことが必要である．佐藤幹夫はこのようなことがより一般の多項式に対してもできないか？と考えて模索を始めたのである．最初のころはいろいろな例で試していたのだが，半年ほど考えてもうまくいかなかったという．しかし，あるきっかけでラプラシアンの基本解の場合にうまくいくのは，2 次の同次多項式が回転群の作用で不変であるからだことに気づいたという．したがって，群の不変性に注目すればよいが，どのような群の作用だと基本解の構成に適当であろうか．ひとつの答えが「概均質な作用である」という答えだった．

このあと，ではどのような作用が概均質になるか，という問題になる．この分類が概均質ベクトル空間の研究の最初の課題になる．問題を複雑にしすぎないため，作用する群を半単純なリー群（複素代数群）として，有限次元ベクトル空間のうちにこの群を線型群として作用させ

て概均質になるかどうかを調べていけばよい．佐藤幹夫は最初にこの問題に取り組んで,「半単純性」と「既約性」を条件にして古典群の場合にほぼ分類を完成させた．その後，例外群に関しても木村達雄があとを引き継いで研究し，完全な分類が完成した．

さて，分類によってどのような概均質ベクトル空間があるのかわかったが，それでは基本解を計算するにはどうしたらよいのか？ 実は佐藤幹夫は基本解の問題にはあまり興味がなくなったようだ．まず分類によってどのような概均質ベクトル空間があるのか，が最初に考えた問題であったが，次には多項式の複素べきがリーマンのゼータ関数で関数等式を導くことに使われるものと同様の性質を持つことに注目した．リーマンのゼータ関数はもっともシンプルな 1 変数の 1 次の多項式であったが，これは概均質ベクトル空間で言えば「相対不変式」にあたる．相対不変式のあるための十分条件として正則性を仮定すると，この相対不変式を使った偏微分作用素があって，この偏微分方程式に対して基本解が作れる，ということになる．一方で，ゼータ関数の関数等式を求めるということは，この複素べきによる超関数のフーリエ変換を計算するという問題と同等になる．

ゼータ関数のほうが数学的に重要である，と考えればこの概均質ベクトル空間において相対不変式の複素べきのフーリエ変換の計算のほうがより重要である．このときリーマンのゼータ関数に相当するものがあるかどうかはまだ未発見だったが，それに先だつ「局所」ゼータ関数と考えれば，これが実数体上の局所ゼータ関数の候補であることは間違いがなく，予想される大域的なゼータ関数の関数等式もこのフーリエ変換から導かれるはずである．したがって，まずフーリエ変換がどのようになるかを研究する必要がある．これについては新谷卓郎との共同研究によって，それがパラメータの指数関数（の多項式）とガンマ関数を使って書けることがあきらかになる．また，新谷卓郎とともに大域的なゼータ関数にあたるものがどういうものか，も明らかになった．ここではベクトル空間内の格子とそれに作用する離散群に注目することが必要になる．これがわかってしまうと，どういう条件で大域的なゼータ関数が作れるかということもわかる．この佐藤幹夫を新谷卓郎の研究によって「概均質ベクトル空間のゼータ関数」の概念がはっきりと定式化された．またその整数論的な意味もはっきりした．応用については未知数であるが，概均質ベクトル空間という表現論的なものから整数論への関連が出てきた．

実際の研究においては，これらの周辺の計算を行ってきた．とくに，基礎的な概均質ベクトル空間と群が簡約でもなく表現が既約でもない場合の概均質ベクトル計算をきちんとすることを中心に計算を行ってきた．実際の計算においては，主に既約な概均質ベクトル空間とに関して若干の進展があったが未解決の問題も多いままである．しかし，少しずつではあるが着実に進んでいる．そのほか，数式処理を利用して微分方程式のグラフィックなどの研究を行った．また，連携研究者はそれぞれの分野で b-関数などの研究を引き続いて行っている．最後に，放送大学むけに微分方程式に関するテキストを執筆した．これは，微分方程式の初歩的な講義の教科書である．ここにおいて，従来の微分方程式の入門書がおもに常微分方程式の解析に偏っていたのを，偏微分方程式まで視野を広げることを目的とした．放送大学の講義として平成 23 年度より放送が始まる．

研究成果の概要（英文）:

Various results on zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces are obtained by viewing from the point of micro-local analysis. Especially experimental calculation on zeta functions of prehomogeneous vector space of commutative parabolic type are carried out. Some other studies on micro-local analysis are done by collaborative researchers.

It has been designed in this study, analysis and determination of the invariant hyperfunctions on the prehomogeneous vector space ①, application to the study of residues and the functional equation of the zeta function ②, and invariant differential equations on the prehomogeneous vector space ③. These were some basic problems in prehomogeneous vector spaces. The following describes the step-by-research results and their significance.

We know that constructing fundamental solutions is one of the method to obtain all the solutions to the given equation. One method to obtain the fundamental solution is to use the complex power of the polynomial of degree two. By operating the Laplacian to the complex power of the polynomial we get the b-function and the

complex power is multiplied by it. At the zero-point of the b-function, the complex power has a pole with respect to the parameter. Expanding the complex power at the point to the Laurent expansion, some singular hyperfunctions appears in the principal part as coefficients of the Laurent expansion. The support of the singular hyperfunctions appearing here are contained in the set of the zero points of the polynomial. One of the most important singular hyperfunctions is the delta function, whose support concentrates on the origin. The fundamental solution is the hyperfunction which becomes the delta function after operating the differential operator. By constructing the fundamental solution, we can calculate any solution using the integral of the fundamental solution.

We have some various method to compute the fundamental solutions, but we can compute the fundamental solution directly from the complex power of the polynomial. For this purpose we have to find polynomials that changes the product of b-functions and the complex power after operating differential operators. Sato Mikio began to seek for finding such polynomials in a more wide class of polynomials. But his trials did not work out well for about half of the year though he tried in the various polynomials. After some trials he found that the success in the case of the Laplacian is attributed to the invariance of homogeneous polynomials of degree two under the rotation group. Then we have to be careful to the group-invariance but what kind of group-action is appropriate for the construction of the fundamental solution. The answer is "the group-action is prehomogeneous".

The problem is what kind of group-action is prehomogeneous. The first problem is the classification of prehomogeneous action on the vector space. In order to make the problem too complicated, we suppose that the group is a semi-simple Lie groups (complex algebraic group) and that the group action is a linear action and we have to search for the prehomogeneous action. Sato Mikio first works on this problem and rounded off the classification of prehomogeneous vector spaces under the conditions "semisimplicity" and "irreducibiliy". Later Kimura Tatsuo addressed the problem for the exceptional Lie group and make the complete table of prehomogeneous vector spaces.

Now we have seen that what kind of prehomogeneous vector spaces exists. Then what we have to do next for the computation of the fundamental solution? Sato Mikio seemed to turn sour the fundamental solutions. He first worked on the problem of the classification of prehomogeneous vector spaces, and the next problem he was attracted was the problem of zeta functions. He gave considerable attention to the fact that the complex power is used to compute the functional equation of Riemann's zeta function. For the functional equation of Riemann's zeta function we used the homogeneous polynomial of one variable and of degree one, and the relative invariants of prehomogeneous vector spaces correspond to the polynomial. Supposing the regularity as the sufficient condition for the existence of relative invariant, we considered the partial differential operators corresponding to the relative invariants and we can construct the fundamental solutions to the differential operators. On the other hand, the problem of the computation of the functional equation is equivalent to that of the computation of the Fourier transform of the complex power of the relative invariant.

The computation of the Fourier transform of relative invariant is more important than that of fundamental solution if you think that zeta functions are more important. The corresponding object of the Riemann's zeta functions was not found at that time, but if you think that the complex power of the relative invariant is the "local" zeta function, this has good grounds for the candidate of the zeta function on the real field. The "global" zeta function to be expected may have the same functional equation. Then we have to study on the explicit computation of the Fourier transform of the relative invariant. Sato Mikio studied the functional equation with Shintani Takuro and proved that the functional equation can be written by using Gamma function and the polynomial of exponential functions of complex parameters. Also, he succeeded to define the global zeta function in the collaborative study with Shintani Takuro. Consequently we can see global zeta function under what conditions. Then the concept of zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces was clearly formulated on the basis of the Fourier transforms of relative invariants. The meaning of zeta functions from the point of view of number theory was also made clear. For the application, the role of the zeta function is still unclear, but we see the connection between the representation theoretic object (prehomogeneous vector spaces) and the numaber theoretic one (zeta functions).

In the practical research, we have been studying around the theory of phomogeneous vector spaces and the application of micro-local analysis. In particular, we carried out laborious calculation on the basic prehomogeneous vector spaces and the prehomogeneous vector spaces with neither reductive group nor irreducible representation. In actual calculation, many problems remain unresolved but some progress has been made on irreducible prehomogeneous vector space . However, it is proceeding slowly but steadily. In addition, we have studied the graphics of differential equations using computer algebra. The collaborative researchers are studying b-functions and related topics in their own area. We also wrote a book on the invitation to differential equation for the students of the University of Air. This is of course an elementary textbook of differential equations. Here, the analysis was biased towards the mainly ordinary differential equations in the introduction of traditional differential equations, with the aim to expand their perspectives of partial differential equations. Since fiscal 2011 began broadcasting a lecture on the Air.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：解析学（代数解析）
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード： 代数解析　超局所解析

１．　研究開始当初の背景
整数論の研究の基本的なツールとして，ゼータ関数の研究がある．そのひとつの発展として佐藤幹夫による概均質ベクトル空間のゼータ関数と超局所解析を応用した研究がある．ゼータ関数は数論的な関数のうち，特に重要なものの一つであるが，これらの関数等式や極の性質を調べて，数論の研究に貢献しよう，というのがこの研究の背景である．
２．研究の目的
本研究の目的は，①概均質ベクトル空間上の不変超関数の決定と解析，②ゼータ関数の関数等式と留数の研究への応用，③概均質ベクトル空間上の不変微分方程式の解析，の３点である．これらに関して，継続的に研究を行ってきた．不変超関数は，いわばゼータ関数を決める群の不変性をあらわし，これによってゼータ関数がどのような微分方程式を満たすか，がわかる．関数等式と極はゼータ関数と数論を結びつける重要な不変量を記述している．概均質ベクトル空間の不変微分方程式を解析することは，ひろくゼータ関数を数論以外に応用することに役立つ．
３．研究の方法
研究の方法は超局所解析である．これは，佐藤幹夫と柏原正樹によって開発された，特異点を余接バンドル上でスペクトル分解して，その詳しい解析を行うものである．本研究では，概均質ベクトル空間の相対不変式の複素べきの特異点の分解を行って，ゼータ関数の関数等式や極の解析に役立てている．
４．研究成果
可換放物型の概均質ベクトル空間において，相対不変式の複素べきの特異点を解析して
余接バンドル上の台上の解析を行った．ここでのマイクロ関数がどなるか，がゼータ関数の解析に決定的な役割をはたす．関数等式や極の様子もわかるようになる．また，不変微

分方程式から，さらに上位の不変式の解析もできる．局所ゼータ関数の極の位置と大域的なゼータ関数の極の位置の関係もわかる．また多変数のゼータ関数に関しても同様な結果が得られる感触を得た.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計５件）

① Kato,Mitsuo; Sekiguchi,Jiro. Reflection subgroups of the monodromy groups of Appell's $F¥sb 4$. Kyushu J. Math. 64 (2010), no. 2, 281-296. （査読付き）

② Sekiguchi,Jiro. Systems of uniformization equations related with dihedral groups. Kumamoto J. Math. 23 (2010), 7-26. （査読付き）

③ Nakayama, Hiromasa; Sekiguchi, Jiro., Determination of b-functions of polynomials defining Saito free divisors related with simple curve singularities of types E_6,E_7, E_8., Kumamoto J. Math., 22, 2009, 1-15（査読付き）

④ Sekiguchi, Jiro., A classification of weighted homogeneous Saito free divisors, J. Math. Soc. Japan, 61, 2009, 1071-1095（査読付き）

⑤ Oshima, Toshio, Annihilators of generalized Verma modules of the scalar type for classical Lie algebras., , Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.,12, 2008, 277-319（査読付き）

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計１件）

①熊原啓作，室政和，「微分方程式への誘い」，2011，財団法人 放送大学教育振興会

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
室 政和（MURO MASAKAZU）
岐阜大学・工学部・教授
研究者番号：70127934
(2)研究分担者
大島利雄（Oshima Toshio）
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：50011721
(3)連携研究者
関口 次郎 (Sekiguchi Jiro)
東京農工大学・
大学院共生科学技術研究部・教授
研究者番号：30117717