

平成 22年 5 月 23 日現在

研究種目： 基盤研究(C)  
 研究期間： 2007～2009  
 課題番号： 19540178  
 研究課題名（和文） ショットキ群およびヨルゲンセン数の研究  
 研究課題名（英文） Research on Schottky groups and Jorgensen numbers  
 研究代表者  
 佐藤 宏樹 (SATO HIROKI)  
 静岡大学・理学部・教授  
 研究者番号： 40022222

研究成果の概要（和文）：メービウス変換群の部分群が離散群であるかどうかを判定することはクライン群の理論における重要な問題である。その必要条件としてヨルゲンセンの不等式がある。等号が成り立つクライン群をヨルゲンセン群という。前回の3部作を今回補完することによりすべての放物型ヨルゲンセン群を発見することに成功した。また、三角群のヨルゲンセン数を多くの場合（ヘッケ群、放物型群等）決定することに成功した。

研究成果の概要（英文）：It is an important problem in the theory of Kleinian groups to decide whether or not a subgroup of the Moebius transformation group is discrete. By supplementing the former three papers with the results obtained this time we complete to find all Jorgensen groups of parabolic type. Furthermore we decided the Jorgensen numbers of many triangle groups, for example Hecke group and triangle groups containing parabolic transformations..

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析、クライン群、リーマン面、ショットキ群、ヨルゲンセン群、ヨルゲンセン数、三角群、ヘッケ群

## 1. 研究開始当初の背景

第1回 Ahlfors-Bers Colloquium、アメリカ数学会ミレニアム記念大会、中国での複素解析国際会議、ベルリンでの国際会議、ICM2002（北京）、トポロジー国際会議（2003）、東京での複素解析国際会議（2004）、フィンラ

ンドにおけるCMFT国際会議（2005）、ベトナムでの複素解析国際会議（2006）などでヨルゲンセン群及びショットキ群などこの研究に関連することについて得られた結果を発表した。この研究は B. Maskit, I. Kra, T. Jorgensen, J. Gilman, S. Wu等の研究と密

接に関係している。上記国際会議での講演の際、複素解析の研究者だけでなく結び目群の研究者、コクゼター群の研究者及びトポロジーの研究者からも関心をもたれ、それらの方面とのかかわりが深いことを知った。我々の研究はこれらの方面の研究の発展にも寄与するものと考えている。この10年余のヨルゲンセン群およびヨルゲンセン数に関する代表者達の研究により初等的離散群のヨルゲンセン数および放物型ヨルゲンセン群についてはかなりのことが解明されてきた ([7, 8, 9, 10])。また、最近 [8] の研究に基づく結び目群の方面からの研究 [3] も出始めた。さらに、B.Maskit はじめ主にアメリカにおいて、1980年代の代表者によるショットキ群、ショットキ空間に関する研究([4,5,6])が多く引用され、ショットキ群に関する研究も活発になってきた。特に、代表者がショットキ空間に導入した座標([4])がショットキ群およびショットキ空間の研究に使用されるようになってきた([1,2])。これらのことが本研究の学術的背景にある。さらに、最近、海外から論文の投稿依頼ならびに国際会議への参加要請がふえてきたこともこの研究を続ける刺激および動機となっている。

## 2. 研究の目的

研究目的 (1) : ヨルゲンセン群をすべて求めること。放物型ヨルゲンセン群を10年以上かけて研究し、最終的に平成17年にすべて求めることに成功した。ヨルゲンセンキーカによりヨルゲンセン群は放物型か楕円型に限ることが知られている。この研究期間中に楕円型のヨルゲンセン群をすべて発見したいと考えている。これによりヨルゲンセン群はすべて求められたことになる。

研究目的 (2) : クライン群、特にショットキ群のヨルゲンセン数をもとめること。モジュラー群、ピカル群や8の字結び目群はそのヨルゲンセン数は1であり、ホワイトヘッド・リンク群は2であることは知られている([7,8])。このとき、「任意に実数  $r \geq 1$  を与えたとき、ヨルゲンセン数が  $r$  となるクライン群 (離散群) が存在するか」という問題が生じる。これに関しては、最近私たちは  $r$  が自然数のとき、及び  $r \geq 4$  のときは、そのようなクライン群が存在することを証明した([10])。残る場合、すなわち  $1 < r < 4$  ( $r \neq 2,3$ ) の場合を調べることが目的である。この研究期間中にこの残された場合を解決したいと考えている。さらに、ショットキ群およびよく知られたクライン群のヨルゲンセン数を求めることもこの研究の目的のひとつである。

研究目的 (3) : クライン群の空間、特にシ

ョットキ空間のヨルゲンセン数を求めること。実型古典的ショットキ空間8種類のヨルゲンセン数は代表者によりすべて求められた ([5,6])。それでは、古典的ショットキ空間のヨルゲンセン数及びショットキ空間のヨルゲンセン数はいくつであろうか。予想としては、前者は4であり、後者は1である。このことが分れば古典的ショットキ空間とショットキ空間とは一致しないという事実の別証明が得られたことになる。この研究期間中にこの予想の前半部分を解決したいと考えている。その他に、クライン空間のいろいろな部分空間のヨルゲンセン数を求めることもこの研究の目的である。

研究目的 (4) : 放物型ヨルゲンセン群の構造を調べること。有限放物型のヨルゲンセン群は16個あることを私達は示した ([9])。この16個の中にはモジュラー群、ピカル群、8の字結び目群、ゲーリングーマスキット群があり、それらの構造はいろいろと調べられている。残りの12個の群については、まだ何も分っていない。2005年フィンランドでの国際会議のおり、A.F. Beardon もこれらの群の構造を調べることは興味ある問題であろうと私たちの研究に対しコメントした。これら12個のヨルゲンセン群の構造をこの研究期間中に解明したいと考えている。

研究目的 (5) : クライン群、特にショットキ群のヨルゲンセン数の擬等角変形を考察すること。たとえば、ヨルゲンセン数は擬等角変形率に関し連続であるか、微分可能性、解析性はどうかなどを調べることも興味ある問題と思われる。研究期間中に解決したいと考えている。この問題に関しては2006年の函数論シンポジウムにおいて志賀氏から質問があった。

研究目的 (6) : 古典的ショットキ群によるリーマン面の一意化の問題を考察すること。コンパクト・リーマン面はショットキ群によって一意化されることは古くから知られているが、古典的ショットキ群によって一意化されるか否かはまだ分っていない。この問題に関しては、Maskit や Hidalgo 等が活発に研究をしている ([1,2])。ここでは、代表者の以前の研究([1])が引用され、利用されている。この問題は、かなり以前から考えていた問題でもあり、この研究期間中に解決したいと考えている。

## 参考文献

- (1) R. A. Hidalgo, The noded Schottky space, London Math. Soc., 73 (1996), 385-403.
- (2) R. A. Hidalgo and B. Maskit, On neoclassical Scottky groups, Trans. Amer. Math. Soc., 358(2006), 4765-4792.
- (3) F. Gonzalez-Acuna and A. Ramirez, Jorgensen subgroups of the Picard

- group, Osaka J. Math., 44 (2007), 471-482.
- (4) H. Sato, Introduction of new coordinates to Schottky space –the general case, J. Math. Soc. Japan, 35 (1983), 23-35.
  - (5) H. Sato, Classical Schottky groups of real type of genus two, I, Tohoku Math. J. 40(1988), 51-75; II, Tohoku Math. J. 43 (1991), 449-472; III, Tohoku Math. J. 49 (1997), 485-502.
  - (6) H. Sato, Jorgensen's inequality for classical Schottky groups of real type, I, J. Math. Soc. Japan 50 (1998), 945-968; II, J. Math. Soc. Japan 53 (2001), 791-811.
  - (7) H. Sato, One parameter families of extreme discrete groups for Jorgensen's inequality, Contempor ary Math., 256 (2000), 271-287.
  - (8) H. Sato, The Jorgensen number of the Whitehead link group, Bol. Soc. Math. Mexicana 10 (2004), 495-502.
  - (9) C. Li, M. Oichi and Sato, Jorgensen groups of parabolic type, I, Comp. Mehtod and Funct. Theory 5 (2005), 248-264; II, Osaka J. Math. 41 (2004), 491-506, III, Kodai Math. J., 28 (2005), 248248-26
  - (10) M. Oici and Sato, Jorgensen numbers of discrete groups, RIMS Koukyuuroku, 1518, Kyoto Univ., (2006), 105-118.

### 3. 研究の方法

代表者及び連携協力者はこれまでアメリカ、ドイツ、フィンランド、中国など海外及び国内での国際会議に参加し、講演を行ったり I. Kra., B. Maskit, T. Jorgensen, J. Gilman, A.F. Beardon, S. Wu 教授等と何度も研究打ち合わせを行ってきた。それによりショットキ群、ショットキ空間及びヨルゲンセン群に関し多くの成果を挙げる事が出来た。また、国内においては日本数学会、京都大学数理解析研究所、シンポジウム、研究集会で講演し、参加者とショットキ群及びヨルゲンセン群について討論、情報交換を行ってきた。このように、海外及び国内の研究集会等に参加し、講演・討論・情報交換を行うことはこの研究にとって欠かせない、基本的なものである。また、連携研究者とディスカッションを行い、情報交換することも極めて大切である。本研究においてもこの研究方法を中心に研究を進めた。

以下、本研究の研究計画・方法を「研究目的」

の各項ごとに記述する。(1) ヨルゲンセン群をすべて求めること (2) クライン群、特にショットキ群のヨルゲンセン数を求めること (3) クライン群の空間、特にショットキ空間のヨルゲンセン数を求めること (4) 放物型ヨルゲンセン群の構造を調べること (5) クライン群、特にショットキ群のヨルゲンセン数の擬等角変形を考察すること (6) 古典的ショットキ群によるリーマン面の一意化の問題を考察することである。

研究目的 (1) 放物型のヨルゲンセン群はすべて求めることに成功した(「研究目的」参考文献 [9] 参照)。残るケースは楕円型ヨルゲンセン群を見つけることである。ゲーリング・マーチンのヨルゲンセン不等式の論文は参考になると考えセミナーを開きいくつかの論文を読んだ。この目的遂行のため中国海洋大学を訪れ李長軍副教授と共同研究を行った。また、S. Huang Dong 大学の Hwa 大学准教授 氏ともメールで研究連絡を行った。放物型ヨルゲンセン群の三部作(研究の目的の参考文献[9])の不備な点を後藤浩文氏の共同研究を行い完全解決に成功した。

研究目的 (2) 「任意に実数  $r \geq 1$  を与えたとき、ヨルゲンセン数が  $r$  となるクライン群(離散群)が存在するか」という問題については、「研究目的」のところで述べたように、残る未解決部分は  $1 < r < 4$  ( $r \neq 2, 3$ ) の場合である。これについて三角群を調べることにより解決されるのではないかと予想を持っている。三角群のヨルゲンセン数を求めることをこの研究テーマの中心に据え、多くの時間をこの研究に費やした。中国海洋大学を2回訪れ、この予想を李長軍副教授と検討した。多くの結果を得たが(研究成果の項を参照)、残念ながら最終解決には至っていない。

研究目的 (3) 代表者は実型古典的ショットキ空間8種類のヨルゲンセン数はすべて求めた([5, 6])。この研究に対しては代表者はこれまでにいろいろの古典的ショットキ群を研究してきたので、その経験と感覚を用いてこの問題を解決しようと試みたが多くの難題があり、大きな進展はなかった。

研究目的 (4) 「研究目的」の文献 [3] の方法が適用できるのではないかと考えた。文献 [3] は代表者の研究 [8] に密接に関係しており、その研究方法には慣れている。文献 [9] の「 $\theta = \pi/2$ ,  $k = \sqrt{3}$ 」に対応するヨルゲンセン群の構造を [3] のアイデアを用い

て解明したいと考えていた。そのとき、アメリカの若い研究者が決定的な結果を発表した（研究成果の項を参照）。

研究目的（5）これは今回初めて考察する問題である。擬等角写像については今までも論文を発表したこともあり、その経験を生かし、この興味ある問題に挑戦したが、他の研究目的の解決に時間を割いたので、この研究にはほとんど手をつけることができなかった。

研究目的（6）最近この問題はアメリカで研究が活発化している。特に、Maskit を中心とする研究者が研究している（「研究目的」文献[1, 2]）。彼らの方法は、以前に代表者が考察した文献 [4] を利用している。代表者は彼らの論文をアメリカ数学会の Mathematical Review 氏でレビューを行った。また、関連する論文を読んだりした。しかし、位相的、関数論的に障害のためあまり進展はなかった。

ここで連携研究者との具体的な共同研究を記述する。

（1）連携研究者である李長軍中国海洋大学副教授とは数年来共同研究を行っている。その成果は「研究目的」中の参考文献[9]の3編の論文において発表されている。今回も2度中国を訪問し、ヨルゲンセン群及びヨルゲンセン数に関し、討論・情報交換など研究打ち合わせを行ってきた。もちろんメールによる研究連絡をしばしば行ってきた。そしていくつかの成果を得ることに成功した。特に、「研究目的」の（2）において顕著な成果があった。今後も「研究目的」の（1）を解決するため李副教授とは共同研究を行うことにしている。

（2）研究協力者の奥村善英静岡大学理学部准教授とは10年以上も、共同でクライン群及びタイヒミュラー空間の研究を続けている。本研究期間中も、「研究目的」の（4）と（6）において共同研究を行った。また、セミナーも行ったが、奥村准教授の体調がすぐれないため、当初期待していたほどの成果を挙げることができなかった。

「研究目的」の（4）及び（6）の研究は主に代表者の佐藤と連携研究者の奥村。「研究目的」の（1）及び（2）の研究は主に代表者の佐藤と連携研究者の李。「研究目的」の（3）及び（5）の研究は主に代表者の佐藤が行った。全体を代表者である佐藤が統括した。

#### 4. 研究成果

モービウス変換群の2元生成部分群  $G$  のヨル

ゲンセン数  $J(G)$  は  $J(G) = \inf \{J(A, B) \mid |\operatorname{tr}^2 A - 4| + |\operatorname{tr}[A, B] - 2| \leq r\}$  により定義される。タイプ  $(p, q, r)$  の双曲型三角群  $G$  とは  $G = \langle A, B \mid B = AC, A^p = B^q = C^r = 1 \rangle$

；  $1/p + 1/q + 1/r < 1$  なる群のことである。初年度（19年度）は研究目的（2）の「 $r >= 1$  に対し、いつ  $J(G) = r$  となる非初等的クライン群は存在するか」を考察した。これに関し、放物型の三角群のヨルゲンセン数を決定することに成功した。途中、「研究目的」の項の参考文献[9]の第III論文に不備のあることが分かり、その不備をなくすことに多くの時間をかけ、最終的に完全なものにすることに成功した。結果は日本数学会で発表した。さらに、次年度（20年度）この結果を複素解析国際会議で講演し、論文として発表した。そのさい、参加者から高い評価を受けアメリカ数学会の "Transactions" に投稿を薦められた。これらヨルゲンセン群の研究はアメリカ・テキサス大学の Reid 教授のグループが私たちの研究をもとに研究をすすめて、研究目的（4）に大きな進展がなされた（参考：J.Callahan, Jorgensen number and arithmeticity, Conformal Geometry and Dynamics, An Electric Journal of the American Mathematical Society, 13 (2009), 160-186.)

また、私たちの研究に刺激されて研究目的（1）の「楕円型のヨルゲンセン群の研究」を始めたいという研究者もいた。その後、研究途中であった三角群のヨルゲンセン数の研究に戻った。そして、放物型の三角群に関しいくつかの結果をえた。これが20年度である。

最終年度（21年度）は三角群のヨルゲンセン数を完成するために力を注いだ。その結果、ヘッケ群（タイプ  $(2, q, \infty)$  の三角群）のヨルゲンセン数は  $4\cos^2(\pi/q)$  であることを示した（プレプリント）。さらに放物型の三角群（ $r = \infty$  の三角群）のヨルゲンセン数は  $4(\cos^2(\pi/p) + \cos^2(\pi/q))$  であることを示すことにも成功した（プレプリント）。一般のタイプ  $(p, q, r)$  型の三角群のヨルゲンセン数は  $4(\cos(\pi/p) + \cos^2(\pi/q) + 2\cos(\pi/p)\cos(\pi/q)\cos(\pi/r))$  であるという予想を得た。この予想は近く解決されるものと考えている。以上の結果はクライン群のヨルゲンセン数の研究に大きな影響をもたらすものと確信している。特に、その方法は研究目的（3）、（6）の研究に大きく貢献するものと思われる。

私にとっての最大の研究課題は「研究目的」の（6）である。すなわち、古典的ショットキ群によりコンパクト・リーマン面は一

化できるかどうかという問題の解決である。  
これにも今回の研究方法は役にたつものと考えている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Hiroki Sato and Hirofumi Goto, Remarks on Jorgensen groups of parabolic type, Proc. 16<sup>th</sup> IC-FIDCAA, 査読有, 16, 2009, 99-105.
- ② Changjun Li, Xiao-Min Li, Li-Mei Wang, On the characteristic of meromorphic functions with three weighted sharing values meromorphic functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, 332 (2007), 1087-1096.

[学会発表] (計3件)

- ① Hiroki Sato, Remarks on Jorgensen groups, 日本数学会, 2009年3月28日, 東京大学
- ② Hiroki Sato, Remarks on Jorgensen groups, 複素解析国際会議, 2008年7月29日, Dongguk University
- ③ Hiroki Sato, Jorgensen numbers of triangle groups, 日本数学会, 2008年3月23日, 近畿大学

[図書] (計3件)

- ① ジュリアン・ハヴィル (佐藤かおり, 佐藤宏樹訳), 白揚社, 反直観の数学パズル, 2010年, 237ページ
- ② レオナード・M・ワプナー (佐藤かおり, 佐藤宏樹訳), 青土社, バナッハ=タルスキーの逆説, 2009年, 277ページ
- ③ D. フラナリー (佐藤かおり訳, 佐藤宏樹監訳), シュプリンガー・ジャパン,  $\sqrt{2}$ の森とアンドリュー少年, 2008年, 359ページ

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

佐藤 宏樹 (SATO HIROKI)  
静岡大学・理学部・教授  
研究者番号: 40022222

##### (2) 研究分担者

##### (3) 連携研究者

奥村 善英 (OKUMURA YOSHIHIDE)  
静岡大学・理学部・准教授

研究者番号: 90214081

李 長軍 (LI CHANGJUN)

中国海洋大学・数学・副教授

研究者番号: