様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２２　年　５　月　１７　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007　～　2009
課題番号：１９５４０１８３
研究課題名（和文）　角がある境界を持つ領域における弾性表面波の散乱に対する解析法

研究課題名（英文）　Method of analysis for scattering of elastic surface waves on boundaries with corners

研究代表者
川下　美潮　（KAWASHITA　MISHIO）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：８０２１４６３３

研究成果の概要（和文）：
本研究課題と関係があると思われる次の研究課題に取り組んだ。
(1)多次元の熱方程式の境界値逆問題に対する考察
(2)波動方程式の解の局所エネルギーに関する減衰評価について
これらについてはそれぞれ新たなことが明らかになり、研究論文をまとめることができた。
一方、本研究を計画した段階で考えていた課題については期待したような成果が上がらなかった。角がない場合にもこれまでの研究を整理し直す必要があった。これについては完全なものが得られ、論文として公開できた。いずれにせよ本研究課題はかなりの冒険であったことは認めざるを得ない。

研究成果の概要（英文）：
The following research themes which seemed to be related to the present research project were investigated:
(1) Study for the inverse boundary value problems for the heat equation in multi-dimensional space.
(2) On the decay estimates of the local energy for the solutions of the wave equations.
For these subjects, new results were obtained. These were summarized as research papers.
About the main subject of the research project, the results expected in the original plan were not obtained. Even in the case that there is no corner, previous studies had to be rearranged and reconsidered. About this case, as a result, complete results were obtained. In any case, it must be admitted that this research task was a remarkable adventure.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：散乱理論、弾性表面波、角を持つ領域、漸近解析

１．研究開始当初の背景

本研究代表者は本研究を開始する以前に平坦かつ無限に広がった空間（半空間という）からなる等方性弾性体を伝わる表面波について研究した。その中でも表面波が境界の摂動により散乱されるという現象を記述する数学的枠組みについて考察していた。さらにその成果を踏まえ、弾性表面波に対する表面波の散乱現象に関するより詳しい性質を引き出すことを目標とした。考察は主に下記の３点に分けて行おうとした

(1) 弾性表面波の散乱現象を記述する量（散乱核）の具体的な表示について。
(2) 弾性表面波の散乱を境界面上の双曲型方程式の散乱問題と見なす方法について。
(3) 弾性表面波のエネルギーの伝わりかたについて。

(1)、(2)については当時ほぼ満足な結果を得ていた。散乱核の具体的な表示を弾性表面波に関する部分を取り出せる形で求めることができた。この表示を用いて(2)に述べた形の考察を行った。弾性表面波に対する特異性の伝播現象は境界面上の１階主要型擬微分方程式により記述される。表面波の入射方向と摂動を経て出てくる方向（入射方向とは異なる）を決めたとき、１番早く出てくる特異性が散乱核に与える影響が明らかになりつつあった。それによれば弾性表面波はあたかも境界面上におけるある種の双曲型方程式に支配され、この方程式に対する散乱問題として解釈できることが明らかになった。

このような背景を踏まえ、本研究課題を申請し、継続して研究を進めることとなった。

２．研究の目的

本研究の目標は角を含む境界を持つ領域における波の散乱現象を解析する有効な方法を確立することあった。目標を絞るために角などの特異性を持つ境界上を伝わる弾性表面波に焦点を当て、研究を進める予定を立てた。この目標をより具体的にするために、次の２つの観点に分けて考察することを考えた。

(1) 弾性表面波の散乱現象を記述する物理量の有効な表示方法について。
(2) 角などの境界における特異性が弾性表面波に与える影響を取り出す方法について。

滑らかな境界を持つ領域における波動散乱問題とは異なり、境界に角を含む場合は系統的な研究が進められていなかった。このようにこの段階では冒険であるとも考えられるが、上の散乱問題を題材にして角を含む境界をもつ領域における双曲型方程式の解に対する漸近解析という、解析学、微分方程式論における基本的な問題に立ち返った研究を行うという狙いで研究計画を立てた。

本研究で扱おうとした散乱問題は工学などの応用面においても実際に現れる問題である。そこでこの問題の数学的な理論構成について調べるという応用面の問題意識にも注意を払った研究を進めることも目標とした。

本研究を計画する際に留意した点は、研究が計画どおりには進まなかったときにどうするかということである。上に述べたように角の問題は独特の難しさが含まれていることが予想され、冒険に近い研究課題である。そこで、通常の波動方程式の場合についても予備的な考察を交えながら研究を進めることで対応することを計画した。

本研究課題の数学、解析学からの観点は、漸近解析の手法や考え方がどれくらい有効かということを確かめることにある。そこで本研究課題に関連すると思われる漸近解析についての問題、およびその解決方法や手法についても注意を払い、関連すると思われる問題についても研究することにした。さらに角の問題に固執することなく、漸近解析が有効と思われる興味ある問題には積極的に関わるように意識した。このように漸近解析という考え方が解析学、特に微分方程式についての研究に本当に有効であることを様々な問題を通じて明らかにしていくことも目標として本研究課題に取り組んだ。

３．研究の方法

研究期間は３年間（平成 19 年度～21 年度）であった。まず研究開始時に「２．研究の目的」欄で述べた研究課題を次のように細分化して取り組むことを考えた。

(1) 弾性表面波の散乱現象を記述する物理量の有効な表示方法について。
① 散乱理論の標準的理論が展開できるかどうかの確認を行う。

② 散乱現象を記述する物理量から弾性表面波の散乱に関する部分を取り出した上、それらの関係が明確になる表示公式を得る。

(2)角などの境界における特異性が弾性表面波に与える影響を取り出す方法について。
① 境界が特異性を持つ場合の弾性表面波の高周波近似の構成法を研究する。
② (1)の②で得た表示公式から期待した情報を取り出すために必要な表面波に関する構成法について考える。

初年度（平成 19 年度）は今後の研究を円滑に遂行するための準備の年という位置づけをして上記計画を実行しようとした。最初に研究分担者である盛田健彦氏（当時は広島大学大学院理学研究科教授であった）、池畠良氏、および曽我日出夫氏と連絡を取り合い、これまでの研究状況や現時点における国内外の関連した研究の到達度を確認し、本研究に関する理解を共有することから始めた。

次に上記の(1)、(2)に掲げた課題についてより深く検討し、各分担者の分担状況を確認し研究を進めるように努めた。

2年目の平成20年度に科学研究費についての制度変更が行われ、研究組織を構成する構成員の役割分担が再定義された。それに伴い、研究分担者の位置づけがより精密になり、これまでの研究分担者の役割のうち、研究費の使用方法については直接計画、立案せず、主に研究代表者の呼びかけに応じて適宜本研究に携わることが主要業務となる研究者を連携研究者と呼ぶことになった。本研究体制をこの変更に照らして見直した結果、これまで研究分担者とし本研究について協力していただいていた池畠良氏と曽我日出夫氏は連携研究者として本研究に関わっていただく方が適切と判断し、そのように変更した。さらに最終年度には盛田健彦氏も連携研究者に移っていただくことにし、最終的には研究代表者と3名の連携研究者という研究組織に移行し、研究を進めた。

本研究に着手する前には境界がなめらかで角がない場合の弾性表面波の散乱問題について研究していた。この研究が本研究申請を行う主な動機付けとなったことは「1．研究開始当初の背景」で述べたとおりである。本研究開始後、過去の関連した研究を精査していうちに、その証明の細部について検討を行わなければならないことが発覚した。また、その当時に得られた結果を整理し直すのに意外に時間を費やしてしまい、角がある場合の考察に移行するのに結構な時間が必要になった。

研究計画を立てた段階から角の問題は独特の難しさが含まれていることが予想されたが、実際実行してみるとその難しさが予想以上のものであることが分かってきた。弾性方程式は方程式系であり、その分だけ通常の波動方程式よりも複雑である。同じことを確かめるだけでもその手順、計算量は格段に増える。さらに見た目は自然で単純であるが、その他の方程式系に比べて構造が意外に複雑であり、物理的に意味のある方程式系のうちでも扱いにくいものとして考えられている。本研究においてもこの複雑さが困難の元凶となった。

そこで計画段階から考えていたように通常の波動方程式の場合について類似の問題を考えることを通じて研究を進めようとした。当初は表面波についての特有の考察が要求される部分が大きな鍵になると思っていたが、予想に反して、表面波を取り出すという部分から難しいものがあった。そこで、次元を落とす、もしくは通常の波動方程式の外部問題において物体の境界が角を含む場合に散乱核の情報を取り出すという問題設定に変更して考察しようとした。この方向転換によりある程度のことは分かったといえるようになったが、まとめて発表するに至るものまではできなかった。

本研究の大きな主題は漸近解析の手法や考え方がどれくらい有効かということを確かめることにもあった。角の問題についてもこの考え方で研究を進める方向であった。そこで、角の問題に限らず、漸近解析に帰着される問題についても考察することを心がけた。それによって意外な副産物や成果が出ることを期待したからである。

上記のような研究方針、研究体制で研究を行った。

４．研究成果

「３．研究の方法」の欄で述べたように、本研究課題は冒険ともいえるものであった。そこで、当初の計画通りに研究が進まなかったときのことも考慮に入れ、通常の波動方程式の場合について類似の問題を考えることに加え、漸近解析の手法や考え方がどれくらい有効かということを確かめるなど、特に角の問題に限らず漸近解析に帰着される問題についても考察することを心がけた。

まず、本研究課題における大きな目標であった角を含む境界を持つ領域における波の散乱現象を解析すること（「２．研究の目的」の欄参照）については、「３．研究の方法」の欄で述べたように２次元の波動方程式に限定し考察し直し、散乱理論の設定はほぼ可能であることは分かった。しかしながら散乱問題において現れる物理量を具体的に取り出すことは困難が伴い、公表できるような形に

までは完成しなかった。このように当初計画と成果とを比べれば、はなはだ不十分であると言わざるを得ない。しかし今回の研究経験を踏まえて、検討する余地があることも理解できた。この問題については今後の課題としたい。

「３．研究の方法」の欄で述べたように、本研究に着手する前には境界がなめらかで角がない場合の弾性表面波の散乱問題についての考察において、その証明の細部の検討を改めて行わなければならないことが発覚した。また当時に得られた結果を整理し直す必要にも迫られた。これについては完全なものに仕上げることができ、論文にまとめることが出来た（「５．主な発表論文等」における〔雑誌論文〕の①）。

次に、漸近解析についての視点から見た他の問題についての考察であるが、これについては次の成果があった。

(1) 熱方程式の境界値逆問題に対する考察
(2) 波動方程式の解の局所エネルギーに関する減衰評価について

これらはともに角を持つ領域に対する問題とは直接には関係しないが、漸近解析の視点から見れば重要な問題である。

(1)は熱が伝わる有界な領域の内部に空洞がある場合に、外部における観測結果から空洞の形状が分かるかという境界値逆問題について考察した。元々考えようとしていた散乱問題は最終的には逆問題の一種になる。(1)は逆問題ということでも本研究課題における当初の問題ともつながっている。そのためこれらについての研究も行った。

この考察における解析部分の核心は境界値問題に対する Green 核の精密な評価を得ることにあった。逆問題ではしばしば通常行われる漸近解析よりも精密な解析が要求される。そのことはこれまでの研究動向からおぼろげには感じていた。しかし、(1)の研究を通じて何が必要になり、通常の漸近解析よりも難しくなる点はどこかが研究代表者の中で明確になった。

この問題に取り組み始めた頃はいきなり一回だけの観測しか許さないという状況設定で上記の熱方程式の境界値逆問題について考察していた。しかし、これまでの逆問題についての研究動向から見れば、まずは無限回観測することも許して、逆問題において回復すべき未知パラメータのうち何が求まるのかということを調べることが先決である。そこでそのための問題設定に変えたものを考察した。これについては池畠優氏（群馬大学）と共同で論文にまとめることが出来た（「５．主な発表論文等」における〔雑誌論文〕の③）。この問題については他の設定で考えること、および一回のみの観測に対応する方法を考えることなど、今後とも継続して考えるべきことが多い。現在、この方向としては、弾性表面波についても逆問題を設定し、考察することを計画している。

(2)については研究代表者が過去に考えた問題の１つである波動方程式の解の局所エネルギーに関する減衰評価に関係する話題である。近年、この方向で意外な発展があった。それは波動方程式自身を直接扱って解の時刻無限大における局所エネルギーを評価する、すなわち漸近評価を行うというものであり、漸近問題として捉えることも出来る。

これについては非線形問題に関連した基本的な重み付きエネルギー評価(Keel Smith Sogge の評価)を外部領域の場合にも拡張することが出来た。この研究は元々、当時私のところで学んでいた修士２年生の杉本裕史氏が修士論文のテーマに選んだ問題が発端となった。杉本氏の考察は領域が星形領域の外側になっている場合で、境界条件も Dirichlet 条件に限定して考察していた。その後、杉本氏の考え方を精密化することにより、Dirichlet 条件のときに限らず、外部領域における一般的な場合にも対応可能な結果に発展させることが出来た（「５．主な発表論文等」における〔雑誌論文〕の②）。この研究は局所エネルギーの減衰評価を求めるという古くからある問題と密接につながっている。2 次元のときには対応する Cauchy 問題の局所エネルギーの減衰の速さが遅すぎて、議論がうまくいかない。これについては現在研究中である。なお、次元が 4 以上の偶数のときはほぼ理解できた状況であり、現在細部の検討を行っているところである。なお、奇数次元のときは 1966 年の Morawetz による画期的な仕事により既に解決済みである。この Morawetz による仕事がこの方面における研究の出発点となっていることを付け加えておく。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① <u>M. Kawashita</u> and <u>H. Soga</u>, Singular support of the scattering kernel for the Rayleigh wave in perturbed half-spaces, Methods and Applications of Analysis, 査読あり、掲載決定.

② <u>M. Kawashita</u> and H. Sugimoto, Weighted energy estimates for wave equations in exterior domains, Forum Math. 査読あり、掲載決定.

③ M. Ikehata and M. Kawashita, The enclosure method for the heat equations, Inverse problem 25 (2009) 075005.　査読あり

〔学会発表〕（計２件）

① Kawashita Mishio　Scattering for the Rayleigh waves in perturbed half-spaces, AMS 2010 Spring Southeastern Sectional Meeting, 平成 22 年 3 月 27 日, Lexington, KY、USA

② 川下美潮　Rayleigh波の散乱逆問題について、2007年度日本数学会秋季総合分科会、2007年9月24日、東北大学

６．研究組織

(1)研究代表者

川下　美潮（KAWASHITA MISHIO）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：802146333

(2)研究分担者

盛田　健彦（MORITA TAKEHIKO）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00192782
(H21:連携研究者)

池畠　良（IKEHATA　RYO）
広島大学・大学院教育学研究科・准教授
研究者番号：10249758
(H20→H21:連携研究者)

曽我　日出夫（SOGA　HIDEO）
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号：40125795
(H20→H21:連携研究者)

(3) 連携研究者

(2)で述べた通りです。