

平成 22 年 6 月 1 日現在

研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2007 ～ 2009
 課題番号：19540189
 研究課題名(和文) 消散作用素のスペクトル構造と消散系の重ね合わせの原理に関する研究
 研究課題名(英文) Research on spectral structure of dissipative operators and super composition of dissipative systems

研究代表者 門脇 光輝 (KADOWAKI MITSUTERU)
 愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
 研究者番号：70300548

研究成果の概要(和文)：主に、物理学や工学に現れる弱い消散(摩擦)効果を伴う波動伝播問題の数学的研究を、スペクトルと呼ばれる現象に固有な振動数に基づいて行った。主な成果として次を得た。弱い消散効果がある媒質を伝播する音響波に関するスペクトル構造と時間経過に伴う波の挙動を決定した。電子を原子に入射した際の反射現象についても同様の成果を得た。また、半空間を伝播する弾性波(例えば地震波)を遠方で観測した際の波形の決定も行った。

研究成果の概要(英文)：We mainly did a mathematical research on the wave propagation problem with a weak dissipative (frictional) effect of appearing to physics and engineering. The research was done by using a characteristic frequency of the phenomenon that is called a spectrum. We obtained the following as main results. Concerning acoustic wave propagation in media of weak dissipative effect, we decided the spectral structure and the behavior of waves of the passage of time. Similar results were obtained concerning the reflection phenomenon when electron is entered into atom. We also decided the shape of waves when elastic waves of a half space (for example, seismic waves) is observed at far.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数学的散乱理論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：消散作用素、波動方程式、スペクトル、重ね合わせの原理、Parseval の等式

1. 研究開始当初の背景

量子力学における吸収効果を伴うSchroedinger方程式を例にあげて説明する。この方

式の生成作用素は、自己共役作用素の消散摂動として生成されている。そして、このことから解として散乱解(時間発展に伴い、解が

非摂動なSchroedinger方程式の解に漸近する解)、束縛解(時間発展しても解が原点の近傍に留まり続ける解)そして消散解(時間発展に伴い解が零に漸近する解)の存在が予想される。これらは、生成(消散)作用素の実連続スペクトル、実固有値そして複素下半面に現れる非実スペクトルの存在に対応して表れる解と考えることができる。そして、方程式の線形性から任意解は先に述べた解の重ね合わせで記述されるのは自然なことである(重ね合わせの原理)。しかしながら、この方程式に限っても重ね合わせの原理の成立を示した完全な結果はない状況であった。一方、自己共役作用素を生成作用素とする発展方程式(以下、自己共役系と記す)に対しては重ね合わせに原理に関する研究は進んでいる。その理由としては、自己共役作用素に対する抽象的なスペクトル分解定理が整備されていることから、それに基づいた抽象的かつ適用範囲の広い解析方法が開発されていることが挙げられる。一方、消散作用素のような非自己共役作用素については、抽象的なスペクトル分解定理が未整備であることから、重ね合わせの原理に関する研究は進んでいるとはいえない状況にある。

2. 研究の目的

本研究は、Hilbert空間における消散作用素のスペクトル構造の解析とそれらが生成する発展方程式(以下、消散系と記す)の任意解に対する重ね合わせの原理の証明を目的としている。そして、これらから散乱解、束縛解、消散解に時間発展する初期データの必要十分条件を生成作用素のスペクトル構造に基づいて与える。特に次を主な研究対象とする:

(1) 以下の消散系①~③に対して上記問題の解決を目指す。

① 非有界領域における消散境界条件付の波動方程式

② 吸収効果を伴うSchroedinger方程式

③ 全空間における消散項付波動方程式

(2) 上記の具体例に対する研究経験から消散(非自己共役)作用素の抽象的なスペクトル分解定理に関する研究・考察を行う。

3. 研究の方法

(1) 重ね合わせの原理の証明については次の①~③の手順で行う。

① 消散作用素のスペクトル構造の解析:
レゾルベントの存在、非存在によって解析・する。なお、数学的散乱理論が適用可能な場合は散乱解の存在を示すことによって連続スペクトルを解析することが有効かつ必要

不可欠である。なお、この証明には以下の2つの方法を主に用いる。1つはレゾルベント評価に基づく方法である。具体的にはKato(1966)のアイデアを用いたMochizukiの方法(1976)によるものである。そしてもう1つは時空評価に基づく方法で、具体的には、Lax-Phillips(1967)のアイデアに基づいて得られる時空評価を用いてEnss-Perryの方法(1980)に従うことものである。

② Parsevalの等式の構築:

具体的には各スペクトルに対応する一般化されたFourier変換・級数の和が恒等作用素になることを示す(固有関数展開定理)。証明方法としてはスペクトルを囲むパスに関して複素積分することで行う。さらに、Schroedinger作用素の固有作用素展開定理(固有関数展開定理の一般化)を証明するためにHelmholtz方程式の解の無限遠方の漸近展開を用いたYafaev(1991)の方法を消散系に拡張・適用する。これによりParsevalの等式の一般化としての固有作用素展開定理の構築も行う。なお、定理の主張および証明において共役作用素も合わせた解析が必要不可欠である。

③ 重ね合わせの原理の証明:

スペクトルにSpectral singularityと呼ばれてる特異点が現れない場合は、Parsevalの等式から直ちに従う。現れる場合は、それに対応する固有関数を用いた稠密性の議論を経て示す。

(2) 消散作用素のスペクトル分解定理に関する考察:

自己共役作用素のスペクトル分解定理は、それが生成する(可換)von Neumann環の可換性から構築されることはよく知られている。一方、上記で述べたように消散作用素に関するParsevalの等式は、その共役作用素も合わせた解析によって構成される。このことから消散作用素から生成されるvon Neumann環の非可換構造に留意した考察を行う。

4. 研究成果

(1) 1次元空間においてランク1の短距離型消散項を持つ波動方程式に対して重ね合わせの原理を証明した。

得られた結果にはSpectral singularityが存在する場合も含まれている。Spectral singularityの存在も考慮して重ね合わせの原理を示している結果・文献の数はそれほど多くはない。なお、扱った消散項には、かなり人工的な条件を仮している。一般的な短距離型のみ仮定では固有値とSpectral singularityの特徴付けが難しく、研究の方法(1)で述べた各段階で支障を来す。

(2) Dirichlet条件を伴う平行平板間領

域において短距離型消散項を持つ波動方程式に対する散乱解の存在を証明した。

平行平板間の波動伝播のスペクトルには可算無限個の敷居値と呼ばれる特異点(連続スペクトルに属する)が現れることが知られている。消散項などによる消散摂動の場合は先に述べたようにスペクトル分解定理が未整備のために、その特異性の解析はより困難となり、散乱解の存在すら示されていない状況であった。このような状況の下、研究方法(1)①で述べた2つの方法で散乱解の存在を証明した。いずれの証明方法においても敷居値の特異性に留意した注意深い解析が必要となった。また、スペクトル分解定理の不備を補うために Simon(1979)が導入したタイプの近似作用素を必要とした。しかし可算無限個の敷居値が存在するために Simon の近似作用素そのものでは適用が困難であった。そこで、この作用素を拡張・改良して、解析・証明を行った。

(3) 半空間自由境界(Neumann 条件)弾性波のレゾルベントの空間遠方の漸近展開を地震波などの物理的現象に基づく Dermenjian-Guillot(1988)の一般化された Fourier 変換を用いて決定・記述した(証明等には、まだ検証を必要とする箇所は少しあるものの結果そのものは正しいと思われる)。

証明は Agmon-Kato-Kuroda の方法(1975)であるような極座標を用いた積分に書き下した上、定常位相の方法と留数計算を適用することでなされた。方法そのものは標準的な扱いであるが、固有関数系が P 波(縦波)、S 波(横波)入射に対する反射波の他に Rayleigh 波と呼ばれる表面波から成る複雑な構成のため、これまでに漸近展開を扱った結果はないと思われる。なお、研究方法(1)②で述べた Yafaev(1991)の方法を消散作用素に拡張・適用しようするとき、この結果は消散境界条件を持つ弾性波を扱う際の基礎結果になりうる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① H. Nakazawa, On wave equations with dissipation II, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste(掲載決定), 査読有
- ② M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, An aspect for spectral analysis of non-selfadjoint operators : Schrodinger and wave equations, MI Lecture Note Series, Kyushu

University 査読無, Vol.20, 2009, pp.115-136

- ③ M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, Some results on spectral analysis of nonselfadjoint perturbations for Schrodinger and wave equations, Proceedings of the 6th international ISAAC, 査読有, 2009, pp.465-475
 - ④ 門脇 光輝, 帯状領域での消散波動の散乱問題と Lax-Phillips 的な証明について, Seminar Notes of Mathematical Science, 査読無, Vol.12, 2009, PP.166-179
 - ⑤ M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, The Parseval formula for wave equations with dissipative terms of rank one, SUT Journal of Mathematics, 査読有, Vol.44, 2008, pp.1-22
 - ⑥ M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, On the rank one dissipative operator and the Parseval formula, Operator Theory : Advances and Applications, 査読有, Vol.186, 2008, pp.241-256
 - ⑦ M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, Non-selfadjoint perturbation of Schrödinger and wave equations, Advanced Studies in Pure Mathematics, 査読有, Vol.47-1, 2007, pp.137-157
 - ⑧ K. Mochizuki and T. Motai, On decay-nondecay and scattering for Schrödinger, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 査読有, Vol.43, 2007, pp.1183-1197
- [学会発表] (計 25 件)
- ① 渡辺 一雄, 2次元のラプラシアンについて, 研究集会第 20 回「数理物理と微分方程式」, 2009 年 11 月 1 日, 焼津
 - ② 門脇 光輝, 3次元空間における弾性波のレゾルベントについて, 八王子偏微分方程式研究集会, 2009 年 10 月 10 日, 八王子セミナーハウス
 - ③ 門脇 光輝, レゾルベントの漸近挙動とその証明について, 2009 年 9 月 6 日, 岩手県民情報交流センターアイーナ
 - ④ H. Nakazawa, Decay and scattering for wave equations with dissipations in layered media, 2009 年 7 月 15 日, 7th ISAAC Congress(International Society for Analysis, its Applications and Computation), Imperial college of London(England)
 - ⑤ 門脇 光輝, On scattering for wave equations with dissipative terms in

- layered media, 2009年日本数学会, 2009年3月26日, 東京大学駒場キャンパス
- ⑥ 渡辺 一雄, 帯状領域における消散項を持つ波動方程式について, 研究集会第19回「数理解物理と微分方程式」, 2009年3月22日, ウェルハートピア熱海
- ⑦ 中澤 秀夫, An aspect for spectral analysis of non-selfadjoint operators -Schrödinger and wave equations-, 産業技術数理チュートリアル: 非エルミート作用素のスペクトル理論とその応用, 2009年3月20日, 九州大学産業技術センター
- ⑧ 中澤 秀夫, On scattering for wave equations with dissipative terms in layered media (その1), 望月清先生退職記念研究集会, 2009年3月17日, 中央大学理工学部
- ⑨ 門脇光輝, On scattering for wave equations with dissipative terms in layered media (その2), 望月清先生退職記念研究集会, 2009年3月17日, 中央大学理工学部
- ⑩ 伊藤 宏, On the nonrelativistic limit of Dirac operators with potentials diverging at infinity, RIMS研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 2008年12月5日, 京都大学
- ⑪ 門脇 光輝, 帯状領域での消散波動の散乱問題とLax-Phillips的な証明について 数理解科学セミナー, 2008年10月11日, 米子高専
- ⑫ 伊藤 宏, Dirac 作用素の非相対論的極限について, 日本数学会, 2008年9月26日, 東京工業大学
- ⑬ 門脇 光輝, 帯状領域での消散波動の散乱問題とLax-Phillips的な証明について 米子偏微分方程式研究集会, 2008年9月3日, キャンパスポート大阪
- ⑭ 望月 清, On space-time estimates and scattering for evolution equations with time dependent perturbations, 解析セミナー, 2008年7月4日, 愛媛大学理工学部
- ⑮ 門脇 光輝, On scattering for wave equations with dissipative terms in layered media, 広島数理解析セミナー, 2008年6月20日, 広島大学理工学部
- ⑯ K. Watanabe, Wave equation on the strip domain, 国際研究集会 Op. The o., Anal. and Math. Phys. , 2008年6月15日, Bedlowo(Poland)
- ⑰ 伊藤 宏, 遠方で発散するポテンシャルをもつディラック作用素の非相対論的極

限について, 大阪大微分方程式セミナー, 2008年1月25日, 大阪大学

- ⑱ 門脇 光輝, 有限区間での消散的波動方程式に対する解の固有関数展開, 第3回線形および非線形の諸問題, 2007年9月29日, 鹿児島県市町村自治会館
- ⑲ 伊藤 宏, Dirac 作用素の非相対論的極限, 2007年夏の作用素論シンポジウム, 2007年9月20日, 青森県物産館アスパム
- ⑳ H. Nakazawa, Some results on spectral analysis of non-selfadjoint operators, 7th ISAAC Congress (International Society for Analysis, its Applications and Computation) in Ankara, 2007年8月16日, Turkey

〔図書〕 (計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

門脇 光輝 (KADOWAKI MITSUTERU)
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 70300548

(2) 研究分担者

渡辺 一雄 (WATANABE KAZUO)
学習院大学・理学部・助教
研究者番号: 90260851

中澤 秀夫 (NAKAZAWA HIDEO)
千葉工業大学・工学部・准教授
研究者番号: 80383371

伊藤 宏 (ITO HIROSHI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 90243005
(H19→H20: 連携研究者)

望月 清 (MOCHIDUKI KIYOSHI)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号: 80026773
(H19→H20: 連携研究者)