

平成22年4月30日現在

研究種目： 基盤研究 (C)
 研究期間： 2007～2009
 課題番号： 19540192
 研究課題名 (和文) アレー効果を伴う人口動態論から由来する非線形楕円型境界値問題の研究
 研究課題名 (英文) Study on nonlinear elliptic boundary value problems with Allee effects, arising in population dynamics
 研究代表者
 梅津 健一郎 (UMEZU KENICHIRO)
 茨城大学・教育学部・准教授
 研究者番号： 00295453

研究成果の概要 (和文) : 数理生物学に現れる人口動態モデルである非線形楕円型境界値問題の正値解の存在及び多重性を変分法と分岐理論を用いて示した. 特に, 分岐理論を援用して得た結果では, 生物の条件的生存を導くアレー効果を示唆する分岐曲線の存在を示すことができた. また並行して, 線形化固有値問題の主固有値を考察することによって, 内包する係数に関する分岐点の依存性を調べ, 分岐点が発散するための必要条件と十分条件を精密に与えた.

研究成果の概要 (英文) : We prove the existence and multiplicity of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems arising in population dynamics, by using a variational technique and the bifurcation theory. Especially, we obtain some type of bifurcation of positive solutions, which suggests that the bifurcation component is derived from the Allee effect from population dynamics, implying a conditional persistence of species. We also discuss the dependence of the bifurcation point on coefficients included in the problem and give necessary and sufficient conditions for the blowing-up of the bifurcation point, by considering the positive principal eigenvalue of the associated, linearized eigenvalue problem.

交付決定額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 関数方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 数理生物学に由来する人口動態モデル

是非線形偏微分方程式の分野では良く知られている. ロジスティック成長率を与える非

線形反応項と個体のランダムウォークを意味する拡散項を合わせ持つ非線形偏微分方程式は、種々の線形境界値条件、すなわち、ディリクレ、ノイマン、ロバン境界条件のもとで、正值解の存在と安定性が論じられてきた。内包する、物理的意味を含むパラメータに対して、初期値の大きさによって安定解を分類する研究がある。人口動態論の立場からは、この分類は個体の死滅、生存、人口爆発等に相当する。条件的生存と呼ばれ、これを促すような方程式に内包される要因をアレー効果と言う。

人口動態モデルにおいては、カントレルとコスナーによって蝶の生態に関するモデルの中でアレー効果の研究が成された。ここでは、ある種の非線形境界条件を考察している。実際、アレー効果が現れる場合、正值解の多重性が必要条件である。しかしながら、ロジスティック反応項を考えると、上記の3つの線形境界条件のもとでは正值解の一意性が成立する。すなわち、アレー効果は期待できない。つまり、ロジスティックモデルについては、アレー効果を促すある種の摂動が領域内部の方程式または境界条件に必要である。

(2) 非線形楕円型境界値問題に対して、パラメータに依存した自明解からの分岐解の研究は、克蘭ダルとラビノビッツの局所分岐理論に端を発して、これまでに種々の局所的及び大域的理論が確立されている。アマンの考察により、自明解で線形化固有値問題を考えると、分岐点はその正值主固有値で特徴付けられる。正值主固有値が固有値問題に内包する係数にどのように依存するかを考えることは人口動態論の立場から特に重要である。なぜなら分岐点は、安定解の現れ方が劇的に変化する臨界値を与えるからである。

カントレル、コスナー他らはこの分岐点の依存性を調べ、分岐点が発散するための必要十分条件を係数の条件で与えた。特に、カントレルとコスナーはディリクレ境界条件のもとで、この必要十分条件を厳密に与えた。境界条件を変えて、ノイマン型、ロバン型境界条件のもとでこの発散問題を考察するならばどのような差違が生じるであろうか。

2. 研究の目的

(1) ロジスティック成長率を記述する非線形反応項をもつ非線形楕円型境界値問題をべき型非線形境界条件のもとで考察して、アレー効果の出現を考察する。ロジスティック反応項が吸収型の非線形性を持つものに対して境界上のべき型非線形項は爆発型である。両者のある種のエネルギーバランスの崩れが正值解の多重性を生み出すと考えられる。存在、多重性に加えて、正值解の分岐曲線の

様子、特に分岐点の存在、分岐点からの分岐の方向、パラメータ領域における分岐曲線の挙動を調べる。正值解のパラメータ依存性についても詳しく研究する。分岐解の安定性、最大、最小正值解の安定性を論じる。付随する初期境界値問題の初期値の安定領域を決定することによって、個体の条件的生存の領域を明らかにする。

(2) 符号不定な係数をもつある固有値問題の正值主固有値の依存性について調べる。特に、発散のための必要条件、十分条件を方程式に内包するパラメータ、重み係数で精密に与える。境界条件はノイマン、ロバン型を扱う。正值主固有値の発散条件が境界条件のどの要因によって引き起こされるかを明らかにする。研究の進展具合によっては、空間多次元の場合の結果を空間一次元の場合に精密化することを試みる。

3. 研究の方法

(1) 優解劣解を用いる方法、変分法、写像度の理論、陰関数定理、及び分岐理論等の非線形理論を駆使して、対象の非線形問題の正值解の存在、多重性を考察する。まず、考える問題を適当な関数空間において恒等写像の非線形コンパクト摂動の零点問題に帰着させる。これは写像度の理論、陰関数定理、分岐理論を援用する際に必要な手順である。ここで重要なことは、考える問題に対して、関数空間を適切に選ぶということである。

変分法に関しては、問題に付随するネハリ多様体とファイバーリング・マップを導入して、ネハリ多様体上で変分法を展開する。これは正值解の多重性のために有効であると思われる。

正值解の分岐枝の大域的な挙動に関する考察に対しては、正值解の先験的一様評価、及び正值解が存在するパラメータ領域の評価を確立する。従来、非線形項が吸収型のみ、または爆発型のみの場合に考察が多くなされ、ここで扱う吸収爆発混合型の非線形項に対する正值解の先験的一様評価は、最近になってスアレスらが定数係数の場合に行ったものに限られる。このスアレスらの結果に変係数、とりわけ符号不定な変係数の場合を適用することは難しい。

(2) 線形固有値問題の主固有値のパラメータ、重み係数による漸近挙動を考察する。空間多次元の場合には、主固有値の変分法による特徴付けを用いる。ロバン型境界条件に対しては、研究代表者がすでに提案した特徴付けを用いる。

空間一次元の場合にはさらに精密な議論を行うことが可能であると思われる。実際、研究代表者がノイマン条件の場合にすでに行った、重み関数を正值パートと負値パート

に分けて精密に論じる方法を、ロバン型境界条件の場合に適用することを試みる。空間多次元の場合には同様の議論を行うことは難しい。手始めに、空間二次元の場合に領域の幾何学的形状が主固有値に及ぼす影響を変分法的特徴付けを通して調べる。

4. 研究成果

(1) 考察対象の非線形問題に対する線形化固有値問題の正值主固有値が内包する係数に依存する様子を明らかにした。より詳しくは、正值主固有値が無限大に発散するための必要条件、十分条件を与えた。この問題は従来、ディリクレ境界条件のもとでカントレルとコスナーによって考察されたが、本研究ではノイマン境界条件、及び符号変化する係数を持つロバン型境界条件のもとで考察を行った。ディリクレ境界条件の場合に得られた十分条件がノイマン、ロバン型境界条件の場合にはもはや十分ではないことを、ある反例を構成することによって示した。

さらに、臨界状況のもとで、発散のための必要条件、十分条件をより精密に議論した。ただし、この議論は空間一次元の場合に限って行われており、多次元への拡張は今後の課題として残る。この拡張のためには、多次元領域の幾何学的性質を十分に解析する必要があると考え、その方面の新たなアプローチを開発しなければならないと考える。

(2) 凹型非線形性を持つ半線形楕円型境界値問題について、問題に付随するネハリ多様体上で変分法を展開して、正值解の存在を得た。汎関数の停留点を求めるのに、方程式に現れる指数の条件から従来行われるコンパクト性に関する議論を効果的に行うことができず、ルベグ積分論の基本定理であるファトゥの補題を援用して困難を克服した。先に考察を行った線形化固有値問題の正值主固有値が、正值解の存在に対するパラメータの臨界値として与えられた。ここで取られた手法は、アレー効果を伴う問題、すなわち解の多重性が期待される問題に対して有効であると思われた。すなわち、問題に付随するネハリ多様体の構造を詳細に分類することによって、正值解の多重性に関するメカニズムを変分構造の立場から理解できるということである。

ところで、境界条件が線形の場合にはネハリ多様体によるこのアプローチは上手く働かなかった。そのために別の手法を考案した。付随する固有値問題の正值固有関数による未知関数のある変換を行い、帰着された問題に対して優解劣解の方法を適用して正值解の存在を示した。固有関数の滑らかさを援用することで、方程式の係数の滑らかさを落として議論することができた。

(3) 領域において食物に関する環境要因が悪い場合について、領域内部ではロジスティック反応項、境界上ではべき型非線形項から成る非線形楕円型境界値問題を考察して、パラメータに関する自明な枝からの正值分岐解の大域的挙動を、ある条件のもとで特徴付けた。

まず、考える問題を含むより一般のクラスの非線形境界値問題を恒等写像の非線形コンパクト摂動から成る写像の零点問題に帰着させた。そして、ロペス・ゴメスによって確立された正值解に関する片側大域的分岐理論を適用して、線形化固有値問題の正值主固有値からの分岐解が連続体として大域的に延長されることを示した。この一般論にロジスティックタイプの非線形項とべき型非線形境界条件の問題を適用した。そして、ある条件のもとで、線形化固有値問題の正值主固有値において劣臨界的に分岐が起り、分岐枝は折り返し点を持ち、パラメータに関して正の方向に大域的に延長することを示した。折り返し点の存在はある非存在定理を確立することによって示した。分岐枝がパラメータに関して大域的に延長できることは、フィロとカークの不等式からパラメータについて一様な正值解の先験的評価を得ることで示せた。

従来の同様な研究は正定数係数の場合に限られており、本研究においてこれを符号不定な変係数の場合に考察の対象を拡げることができた。しかしながら、一方で得られた結果は非常に制限的であり、まだ考察に及んでいない場合については今後の課題と言える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① K. Umez, Global bifurcation results for semilinear elliptic boundary value problems with indefinite weights and nonlinear boundary conditions, NoDEA, 査読有, online published, 印刷中, 2010 年出版予定.
- ② K. Umez, Blowing-up properties of the positive principal eigenvalue for indefinite Robin-type boundary conditions, Rocky Mountain J. Math., 査読有, 印刷中, 2010 年出版予定.
- ③ K. Umez, Positive solutions of semilinear elliptic eigenvalue problems with concave nonlinearities, Advances in Differential Equations, 査読有, 12 巻, 2007 年, 1415-1436.

- ④ K.Umezu, Blowing-up of principal eigenvalues for Neumann boundary conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Section A, 査読有, 137 卷, 2007 年, 567-579.

[学会発表] (計 6 件)

- ① 梅津健一郎, Global bifurcation for indefinite weighted elliptic problems with nonlinear boundary conditions, 日本数学会 2010 年年会函数方程式論分科会, 2010 年 3 月 25 日, 慶應義塾大学理工学部.
- ② 梅津健一郎, A super and subsolution method for sublinear problems with low regularity coefficients, 日本数学会 2008 年秋期総合分科会函数方程式論分科会, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学理工学研究科.
- ③ K.Umezu, Blowing-up properties of the positive principal eigenvalue for indefinite Robin-type boundary conditions, The 2nd China-Japan Colloquium of Mathematical Biology, 2008 年 8 月 6 日, 岡山大学環境理工学部.
- ④ 梅津健一郎, Nehari manifold, fibering maps and semilinear elliptic boundary value problems, 数理科学セミナー, 2007 年 9 月 10 日, 同志社大学工学部.
- ⑤ K.Umezu, Multiplicity of positive solutions to nonlinear elliptic boundary value problems arising in population dynamics, The workshop "Direct, Inverse and Control Problems for PDE' s", 2007 年 6 月 27 日, Citta' Universitaria, Rome, Italy.
- ⑥ K.Umezu, Principal eigenvalues of Neumann and Robin type eigenvalue problems with indefinite weights (招待講演), The 4th International Conference on Mathematical Biology, 2007 年 6 月 1 日, Wuyishan, China.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

梅津 健一郎 (UMEZU KENICHIRO)
茨城大学・教育学部・准教授
研究者番号: 00295453