

機関番号：24402

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540193

研究課題名 (和文) 放物型方程式のポテンシャル論的研究

研究課題名 (英文) Potential theoretic approach to parabolic equations

研究代表者

西尾 昌治 (MASAHARU NISHIO)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90228156

研究成果の概要 (和文)：熱方程式などの放物型方程式に対し，その解空間の構造および，底空間の幾何学的状況などとの関係を解の積分表示などポテンシャル論的手法を用いた詳細な解析を行った．方程式としては，ラプラシアンを分数ベキを含んだ微分積分方程式などを取り扱い，放物型ベルグマン空間の研究では，時間変数に関する分数ベキ微分を用いる新しい手法によって，トエプリッツ作用素や調和双対に関する結果が得られた．

研究成果の概要 (英文)：The fundamental purpose of this research is to analyze the structure of the spaces which consist of solutions of parabolic equations by using potential theoretic techniques, for example, integral representations and mean value properties. We applied some new methods and notions such as fractional derivatives and the Schatten classes to spaces of solutions of parabolic equations, to obtain results with respect to Toeplitz operators and generalizations of harmonic conjugate systems.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：解析学，ポテンシャル論

科研費の分科・細目：基礎解析学・複素解析

キーワード：放物型方程式，ベルグマン空間，トエプリッツ作用素，分数ベキ作用素

1. 研究開始当初の背景

(1) 熱方程式のマルチン境界に関する研究では，ポテンシャル論的な一般論は放物型方程式を含む形でほぼ完成しているといえる状態で，具体的な領域に対していくつかの結果が提示されてきていた．そのなかで，本研究で注目していたのは，アッペル変換を用いたアプローチで非有界領域に対して有力な手段であった．そしてアッペル変換を一般化させることによる研究の深化が期待できる状況であった．また，アッペル変換は通常の

熱方程式のみならず多重熱方程式にも有用であることを示唆する結果も出てきており，その意味でもアッペル変換の一般化が急がれるところであった．

(2) ポテンシャル論における研究の一つの方向として，方程式の正值解に着目した研究，特にマルチン境界に関する研究がある．日本においても数多くの研究があり，研究代表者の西尾もその方向で研究してきた．それに対し，函数論においてベルグマン空間は非常に

自然な研究対象であった。この考え方を熱方程式あるいはその一般化である分数べき放物型方程式に適用した理論があらわれつつあった。この放物型ベルグマン空間は放物型であると同時にパラメータを調節することにより調和ベルグマン空間になることがわかり、その意味においてもさらに深い構造の解明が待たれている状況であった。

2. 研究の目的

熱方程式などの放物型方程式に対し、その解空間の構造および、底空間の幾何学的状況などとの関係を解の積分表示などポテンシャル論的手法を用いて詳細に解析することが本研究の基本的な目的である。取り扱う放物型方程式は、ユークリッド空間およびリーマン多様体上の熱方程式、高階の放物型方程式である多重熱方程式、および、ラプラスアン分数べきを含んだ微分積分方程式である。

3. 研究の方法

数学においては、研究を効率よく進めるためには、他の研究者と研究連絡を重ね問題意識を高めていくことが文献の精査とともに必要不可欠である。そのため本研究では大部分を旅費にあてた。また、備品予算は主に新規に出版された図書の補充に使用した。

まず研究開始初期において、各分担者連携研究者研究協力者による調査情報収集を行った。そして、その調査研究で明らかになった点をふまえ、進展が期待される方向への更なる発展を目指した。そのため、研究分担者や連携研究者を中心としたセミナーを催し、これまでに得られた結果の検討や問題点の洗い出しを行った。海外からは平均値の定理に新解釈を与えたドイツの新進数学者シメオニディス博士を招聘した。年度の後半では、連携研究者がその問題点を解決すべく研究を進める。また、本年度が当該研究課題の最終年度になるため、これまで得られた成果をまとめ、その総括を行う予定である。

なお、研究分担者、連携研究者に対し、次のように役割分担を行った。

(1) 熱方程式に対するマルチン境界を決定するために、下村勝孝は熱方程式を保つ変換の理論を担当する。分担者の佐官謙一は調和写像を擬等角写像論との関連から考察し、主に2次元の理論の部分を担当する。マルチン境界についての一般論については正岡弘照が担当する。

(2) 多重熱方程式の研究は代表者の西尾昌治と下村勝孝の共同研究としてすすめていく。

(3) 分数べきの放物型方程式の研究では、確率論の部分で竹内敦司が担当し、それを用いた平均値の定理に関する考察、ハルナックの不等式の構築には西尾昌治と鈴木紀明があたる。放物的ベルグマン空間の研究には、山田雅博、西尾昌治と鈴木紀明がすすめていく。

4. 研究成果

上記研究計画において、大きく研究が進んだテーマは、多様体上の熱方程式と分数べきの放物型方程式の研究である。一方、多重熱方程式に関してはいくつかの新しいアイデアは発見されてきているものの残念ながら研究成果として結実するに至っていない。

以下でその成果について詳細に説明する。

(1) まず、多様体上の熱方程式については解を保つ変換についてくわしく研究し、3次元以上で次元が等しい場合の回転不変計量の場合にその多様体及び写像の決定問題を解決した。その成果は学術雑誌に発表した。これは本課題においてマルチン境界を決定する基礎と位置づけている結果である。

(2) 次に、分数べきの放物型方程式については関数解析的手法をとりいれたことが大いに成功した。放物型ベルグマン空間上のカルレソン不等式の研究では特に指数の異なる場合を取り扱い、埋め込み作用素の有界性やコンパクト性に関してほぼ完全な結果を得ることができた。また、トエブリッツ作用素については、その小ささを表す指標であるシャッテン族やヘルツ空間の概念に基づいて研究を進め、成果を学術雑誌および学会にて発表した。補間問題やその双対であるアトム分解についてもさらに研究が進展し、いくつかの成果が得られた。現在論文を準備中である。調和双対に関する結果については新たに時間変数に関する分数べき微分を用いて、非常に美しい結果が得られ、論文発表を行った。

(3) 分担者の竹内敦司は、過去の状態に依存するような飛躍型確率関数微分方程式の解に対してマリアヴァン解析を適用し、方程式の係数が一様楕円性条件を満たせば、解の分布が絶対連続であることを導いた。また、Kolmogorovの後退方程式を用いて、飛躍型確率微分方程式の解の分布に関する密度関数について、その対数微分に関する結果(Bismut-Elworthy-Li型公式)を得た。

(4) 分担者の正岡弘照は有界調和関数の族とディリクレ積分が有限な調和関数の族が一致するような開リーマン面はそのミニマルマルチン境界が調和測度0の集合を除き、高々有限個の調和測度が正であるような点から構成されていることを示した。また、2つの指数の異なる調和ハーディ空間が一致するような開リーマン面はそのミニマルマルチン境界が調和測度0の集合を除き、高々

有限個の調和測度が正であるような点から構成されていることを示した。そして、擬有界 (quasibounded) 調和関数の族と正值調和関数の差で表現できる調和関数の族が一致するような開リーマン面は高々可算個の調和測度が正であるような点から構成されていることを示した。

(5) 分担者の佐官謙一は、研究成果複素平面の原点を固定し単位円板を単位円板の上へ写す調和かつ K 擬等角である写像に対して、 K が 1 に収束するとき漸近的にシャープであるように Heinz の不等式を改良した。また、そのような写像は bi-Lipschitz 写像になるという結果が知られているが、bi-Lipschitz 定数の評価を K が 1 に収束するとき漸近的にシャープであるような形で示したという意味で、その結果を改良した。また、Kalaj は、単位円板から 0 を含む凸領域の上への単葉で $F(0) = 0$ をみたく調和写像 F に対し、Heinz 型の不等式を示した。それに対し、像領域が 0 を含む有界な凸領域の場合に、Heinz の結果を含み、Kalaj の結果をより精密化した不等式を与えた。いずれも D. Partyka (Poland) との共同研究の成果である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 37 件)

- ① M. Nishio and K. Shimomura, Caloric morphism for rotation invariant metric, Hiroshima Math. J., 40 (2010), 315-331. 査読有
- ② M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces, Tohoku Math. J., 62 (2010), 269-286. 査読有
- ③ Y. Hishiokawa, M. Nishio, and M. Yamada, A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman spaces, Hokkaido Math. J., 39 (2010), 85-114. 査読有
- ④ A. Takeuchi, The Bismut-Elworthy -Li type formulae for stochastic differential equations with jumps, Journal of Theoretical Probability, 23 (2010), 576-604. 査読有
- ⑤ H. Masaoka, The classes of bounded harmonic functions and harmonic functions with finite Dirichlet integrals on hyperbolic Riemann surfaces, Kodai Math.

J., 33 (2010), 233-239. 査読有

- ⑥ M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Weighted Berezin transformations with application to the Toeplitz operators of Schatten class on the parabolic Bergman spaces, Kodai Math. J., 32 (2009), 501--520. 査読有
- ⑦ M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces, Potential Analysis 28 (2008), 357-378. 査読有
- ⑧ A. Takeuchi, Absolute continuity for solutions to stochastic functional differential equations with jumps, Stochastics and Dynamics 7 (2007), 153-186. 査読有
- ⑨ D. Partyka and K. Sakan, On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 32 (2007), 579-594. 査読有

[学会発表] (計 7 件)

- ① 鈴木紀明, 西尾昌治, 山田雅博, 放物型 Bergman 空間上の Schatten-Herz 族 Toeplitz 作用素について, 日本数学会, 2010 年 3 月 24 日, 慶応大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西尾 昌治 (MASAHARU NISHIO)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90228156

(2) 研究分担者

小松 孝 (TAKASHI KOMATSU)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80047365
(2007 年度)

佐官 謙一 (KEN-ICHI SAKAN)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70110856
(2007-2009 年度)

正岡 弘照 (HIROAKI MASAOKA)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：30219315

(2007-2008 年度)

鈴木 紀明 (NORIAKI SUZUKI)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：50154563
(2007 年度)

下村 勝孝 (KATSUNORI SHIMOMURA)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：00201559
(2007-2009 年度)

竹内 敦司 (ATSUSHI TAKEUCHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30336755
(2008-2009 年度)

(3) 連携研究者

山田 雅博 (MASAHIRO YAMADA)
岐阜大学・教育学部・准教授
研究者番号：00263666
(2008-2010 年度)

佐官 謙一 (KEN-ICHI SAKAN)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70110856
(2010 年度)

正岡 弘照 (HIROAKI MASAOKA)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：30219315
(2009-2010 年度)

鈴木 紀明 (NORIAKI SUZUKI)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：50154563
(2008-2010 年度)

下村 勝孝 (KATSUNORI SHIMOMURA)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：00201559
(2010 年度)

竹内 敦司 (ATSUSHI TAKEUCHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30336755
(2010 年度)