

平成 22 年 6 月 11 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007 ～ 2009

課題番号：19540196

研究課題名（和文）バナッハ空間の幾何学的定数とノルム不等式の研究及びその応用

研究課題名（英文）Research on geometric constants and norm inequalities in Banach spaces and their applications

研究代表者

高橋 泰嗣（TAKAHASHI YASUJI）

岡山県立大学・情報工学部・教授

研究者番号：30001853

研究成果の概要(和文): バナッハ空間の幾何学的定数とノルム不等式を研究した。特に, James 定数と von Neumann-Jordan 定数の関係が集中的に議論され, これら 2 つの定数について極めて単純な不等式を得た。この結果は, Alonso-Martin-Papini の提供した疑問に肯定的に答え, このような不等式に関する先行結果のすべてを改良するものである。また, ノルム不等式の一般化・精密化も考察した。

研究成果の概要(英文): We studied geometric constants and norm inequalities in Banach spaces. In particular the relation between James and von Neumann-Jordan constants was discussed intensively, and we obtained a quite simple inequality about these two constants. This answers affirmatively a question posed by Alonso-Martin-Papini, and improves all previous results concerning these inequalities. We also investigated refined generalizations of norm inequalities.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：実解析，関数解析

科研費の分科・細目：数学，基礎解析学

キーワード：バナッハ空間の幾何学，James 定数，von Neumann-Jordan 定数，幾何学的定数，幾何学的性質，ノルム不等式

1. 研究開始当初の背景

(1) 2001 年, 加藤・Maligranda・高橋により, バナッハ空間 X の幾何学的定数 $J(X)$ (James 定数) と $NJ(X)$ (von Neumann-Jordan 定数) の関係が初めて紹介され, その後, 多くの研

究者によってその改良が試みられた。最も精力的に研究したのは Maligranda である。彼は積極的に海外(タイ等)に出向き, 若い数学者たちに, その改良のみならず一つの予想さえ提供した。Saejung は, その予想の証明

を試みたが失敗に終わる．この頃，Gao の定数 $E(X)$ や新たな定数が導入され，それらの定数の関係，及び，空間の幾何学的性質と定数との関係，などが活発に研究された．

(2) 2006 年，九州工業大学で国際シンポジウムが開催され，高橋(代表者)は基調講演で，バナッハ空間の幾何学的定数を一つの大きな枠組みの中で統一的に議論する方法を提案した．ここで述べられた方法は極めて斬新的で，既知の様々な結果を統一的に導くのみならず，新たな結果を生み出す可能性を示唆した．これまでの研究では，種々の幾何学的定数が導入され，それぞれの立場で様々な結果が紹介されていたが，これらの関係が必ずしも明確でなかった．ここで提案した方法を用いることにより，バナッハ空間の幾何学的定数，特に， $J(X)$ と $NJ(X)$ の関係を中心に既知の結果を改良することが可能と思えた．

2. 研究の目的

バナッハ空間の様々な性質は，当然のことながら，そのノルムの性質によって決定される．従って，ノルム不等式の研究が重要となる．空間の一樣凸性を導く Clarkson 不等式は典型的な例である．また，空間の幾何学的性質は，その単位球あるいは単位球面の形状で決定される．これらの形状を調べるために，そこで定義される種々の幾何学的定数が用いられる．典型的な例は，James 定数 $J(X)$ と von Neumann-Jordan 定数 $NJ(X)$ である．重要な関数空間や数列空間について，これらの定数が決定されているが，その際に特殊なノルム不等式が用いられる．このような空間では， $J(X)$ と $NJ(X)$ の関係は知られている．一般のバナッハ空間では，このようなノルム不等式は使えないために，これらの定数の関係を考察するのは容易ではない．これまでに種々の幾何学的定数が導入されているが，その定数はノルムによって定義される．一般のバナッハ空間について，これらの定数の関係を調べるためには，一般のノルムについてどのような不等式が成り立つかを考察する必要がある．本研究では，バナッハ空間の幾何学的定数とノルム不等式を考察する．特に，James 定数と von Neumann-Jordan 定数を中心に，それらの関係を明らかにし，その応用を試みる．

3. 研究の方法

一般論として，良い成果を得るためには，良い方法が必要である．天才デカルトやヒルベルトの研究方法を見ると，既知の様々な結果について，それらの根底にある深い考え方を理解し，問題の本質を把握することが重要と

思われる．本研究の中心テーマは， $J(X)$ と $NJ(X)$ の関係を考察することにある．この研究は 2001 年に，加藤・Maligranda・高橋が始め，その後，そこで得られた結果や提起された問題について，その改良や問題の部分的な解答が紹介されている．当時 $J(X)$ と $NJ(X)$ を直接比較したのであるが，高橋は 2006 年に，これらの幾何学的定数を一つの大きな枠組みの中で統一的に論ずることを提案した．以下に，主な研究手法を紹介する．

- (1) $J(X)$, $NJ(X)$, $E(X)$, 及び新たな定数 $A(X)$ などについて深く理解するために，それらと同値な定義を与える．これにより，定数の値を求めることが容易になる．また，非負の実数の間で成立する種々の不等式を利用して，定数の関係を考察することが比較的容易になる．
- (2) $NJ(X)$ を $E(X)$, $A(X)$ 等で上から評価する．更に， $E(X)$, $A(X)$ 等を $J(X)$ で上から評価する．これにより， $NJ(X)$ の $J(X)$ による上からの評価が得られる．これらの評価式は，ある種の空間で定数を決定する際に極めて有効である．このような方法を考える理由は， $J(X)$ と $NJ(X)$ の関係を直接比較することは容易でないことにある．

4. 研究成果

(1) バナッハ空間 X の von Neumann-Jordan 定数 $NJ(X)$ と James 定数 $J(X)$ の関係を考察した． $NJ(X)$ の $J(X)$ による下からの評価はよく知られているが，上からの評価は多くの研究者の努力にもかかわらず，困難を極めた．最初の結果は 2001 年，加藤・Maligranda・高橋により発表され，その後，この結果の改良が多くの研究者の注目を集めた．最初の改良が発表されると，Maligranda はより単純な不等式を予想した．この予想は，しばらく未解決の状態であったが，Alonso-Martin-Papini により 2008 年に肯定的に解決された．彼らが用いた手法は斬新的で，その後の発展に大きく寄与した．類似の手法により，Wang-Pang は彼らの結果の改良に成功した．しかしながら，そこで紹介された不等式は，極めて複雑なものであった．彼らの証明では，それ自身興味深い別の不等式を利用したのであるが，この不等式の改良が問題と思われた．2009 年，この不等式を改良することにより，極めて単純な不等式が得られた．主定理は次の如く述べられる： $J(X) < 2$ のとき， $NJ(X) < J(X)$ が成立する．ただし， $J(X) = 2$ のときは， $NJ(X) = J(X)$ である．この結果は，これまでのすべての結果を改良するのみならず，Alonso たちの提起した疑問に肯定的に答えるものである．関連した内容は，雑誌論文(4), (5), 学会発表(4), (6), (8)等で発表された．

(2) $J(X) < 2$ ならば $NJ(X) < J(X)$ である. この不等式は極めて単純で, これ以上望むべくもないように思える. これまでの研究経過から見ると, 一つの到達目標であろう. しかしながら, 更なる改良が可能である. ごく最近, より精密な不等式の証明に成功した. この不等式についても, 最良か否かは不明である. 数学に限った話ではないが, 更なる発展をするためには, 既知の結果についても深く理解し, その証明方法を辿ってみるべきである. 現在, 「 $J(X) < 2$ ならば $NJ(X) < J(X)$ 」について, 様々な証明を試みている. 結果として, 既知の様々な結果が統一的に導かれることが分かった. 関連した結果は, 雑誌論文(2), 学会発表(5), (6), (7)等で発表した.

(3) 新たな幾何学的定数 $A(X)$ を導入し, 幾何学的性質の特徴付けを行った. また, $A(X)$ と他の幾何学的定数, 特に, $J(X)$, $NJ(X)$ 等との関係を詳細に考察し, その応用を試みた. 更に, ルベグ・ボホナー空間についても同様の考察を行った. 関連した結果は, 雑誌論文(3), 学会発表(1), (2), (3)等で発表した.

(4) 種々のノルム不等式を研究し, その応用を試みた. 一般のノルム不等式について, その一般化・精密化を行い, 等号成立条件も考察した. また, Hlawka 不等式のような特殊なノルム不等式を考察し, その一般化及び逆不等式も与えた. これらの結果は, 空間の幾何学的性質の研究に応用される. 関連した結果は, 雑誌論文(1), (6), (7), (9), (10)等で発表した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計24件)

- (1) S. Takahasi, J. M. Rassias, S. Saitoh and Y. Takahashi, Refined generalizations of the triangle inequality on Banach spaces, Math. Inequal. Appl., to appear. (査読有)
- (2) M. Kato and Y. Takahashi, On sharp estimates concerning von Neumann-Jordan and James constants for a Banach space, Rend. Circ. Mat. Palermo Serie II, Suppl. 82 (2010), to appear. (査読有)
- (3) 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some results on new geometric constants of Banach spaces, 北海道大学数学講究録 143 (2010), 48-53. (査読無)
- (4) 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some recent results

on James and von Neumann-Jordan constants, 数理解析研究所講究録 1667 (2009), 129-133. (査読無)

- (5) Y. Takahashi and M. Kato, A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach space, J. Math. Anal. Appl. 359 (2009), 602-609. (査読有)
- (6) Y. Takahashi, S. Takahasi and S. Wada, A general Hlawka inequality and its reverse inequality, Math. Inequal. Appl. 12 (2009), 1-10. (査読有)
- (7) 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Dunkl-Williams 型不等式と幾何学的定数, 数理解析研究所講究録 1615 (2008), 95-98. (査読無)
- (8) Y. Takahashi, Some geometric constants of Banach spaces -- A unified approach, Proc. Internat. Sympo. on Banach and Function Spaces II, Kitakyushu, Japan, 2006 (2008), 191-220. (査読有)
- (9) K. Mitani, K. Saito, M. Kato and T. Tamura, On sharp triangle inequalities in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 336 (2007), 1178-1186. (査読有)
- (10) M. Kato, K. Saito and T. Tamura, Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces, Math. Inequal. Appl. 10 (2007), 451-460. (査読有)

[学会発表](計25件)

- (1) 高橋泰嗣, Some geometric constants for Lebesgue-Bochner spaces $L_p(X)$, 日本数学会年会, 2010年3月26日, 慶應義塾大学
- (2) 高橋泰嗣, Some results on new geometric constants of Banach spaces, 第18回関数空間セミナー 2009年12月24日, 北海道大学
- (3) 高橋泰嗣, James and von Neumann-Jordan constants for Banach sequence spaces $l_2(X)$, 実解析学シンポジウム 2009, 2009年10月25日, 城西大学
- (4) 高橋泰嗣, On James and von Neumann-Jordan constants of Banach spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月25日, 大阪大学
- (5) M. Kato, Some recent results on Banach space geometry, 6th International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, September 2009, Acquafredda di Maratea, Italy
- (6) 高橋泰嗣, Some recent results on geometric constants of Banach spaces (招待講演), The 3rd International

- Symposium on Banach and Function Spaces 2009, 2009年9月16日, 九州工業大学
- (7) 高橋泰嗣, バナッハ空間の幾何学的定数に関する最近の話題, 数理解析研究所研究集会「非加法性の数理と情報: 凸解析との接点」, 2009年8月5日, 京都大学
 - (8) M. Kato, Some recent results on the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces (招待講演), Analysis, Inequalities and Homogenization Theory---Midnight sun conference in honor of Lars-Erik Persson, June 2009, Lulea, Sweden
 - (9) 高橋泰嗣, Some recent results on James and von Neumann-Jordan constants, 数理解析研究所研究集会「バナッハ空間及び関数空間論における幾何学的定数の研究とその応用」, 2009年5月22日, 京都大学
 - (10) 加藤幹雄, On inequalities related with uniform convexity (招待講演), The Sixth International Conference on Nonlinear and Convex Analysis, March 2009, Tokyo
 - (11) 高橋泰嗣, Super-reflexivity, type, cotype and Gao's constants, 日本数学会年会, 2009年3月, 東京大学
 - (12) 高橋泰嗣, Some recent results on Gao's constants, 第17回関数空間セミナー, 2008年12月, 東京理科大学
 - (13) 高橋泰嗣, Dragomir型不等式とMaligranda型不等式, 実解析学シンポジウム2008, 2008年11月, 山口大学
 - (14) M. Kato, On Hanner type inequalities with a weight in Banach spaces (招待講演), International Workshop on Interpolation Theory, Function Spaces and Related Topics, September 2008, Toledo, Spain
 - (15) 高橋泰嗣, Dragomir型不等式について, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月, 東京工業大学
 - (16) 高橋泰嗣, Some sufficient conditions for normal structure of Banach spaces, 日本数学会年会, 2008年3月, 近畿大学
 - (17) 高橋泰嗣, On some geometric parameters and normal structure of Banach spaces, 実解析学シンポジウム2007, 2007年10月, 大阪教育大学
 - (18) 高橋泰嗣, Modulus of convexity, weak orthogonality and normal structure of Banach spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 2007年9月, 東北大学
 - (19) M. Kato, Some recent results on direct sums of Banach spaces (招待講演),

- International Workshop on Banach space, Operator Theory and Applications to Nonlinear Analysis, July 2007, Harbin, China
- (20) 高橋泰嗣, Some results on von Neumann-Jordan type constants of Banach spaces, 数理解析研究所研究集会「バナッハ空間, 関数空間及び不等式の研究とその応用」, 2007年6月, 京都大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 泰嗣 (TAKAHASHI YASUJI)
岡山県立大学・情報工学部・教授
研究者番号: 30001853

(2) 研究分担者

高橋 眞映 (TAKAHASHI SIN-EI)
山形大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 50007762
加藤 幹雄 (KATO MIKIO)
九州工業大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号: 50090551

