

平成 22 年 4 月 9 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2007～2009

課題番号：19540197

研究課題名（和文） 複素領域での非線型偏微分方程式の特異点の研究

研究課題名（英文） A STUDY OF SINGULARITIES IN NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE COMPLEX DOMAIN

研究代表者

田原 秀敏（TAHARA HIDETOSHI）

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：60101028

研究成果の概要（和文）：複素領域での非線型偏微分方程式の解の特異点を研究し、次の成果を得た。(1) 一階のブリオ・ブーケー型の非線型偏微分方程式の場合に、超曲面上でのすべての特異点を完全に決定した。(2) 全特性的な非線型偏微分方程式の解の一意性のシャープ形を証明し、それによって、特異点の非存在を示した。(3) 非線型偏微分方程式の対数的特異点をもつ解を適当な条件下で構成した。(4) 非コワレスキー型の場合に、解の特異点での漸近展開をメルン変換を用いて決定した。

研究成果の概要（英文）：We studied singularities of solutions of nonlinear partial differential equations in the complex domain, and obtained the following results. (1) In the case of Briot-Bouquet type partial differential equations, we determined all solutions which have singularities on a hypersurface. (2) We proved a sharp form of the uniqueness of the solution of nonlinear totally characteristic type partial differential equations, which yields the non-existence of singularities. (3) We constructed solutions with logarithmic singularities to certain nonlinear partial differential equations. (4) We determined asymptotic expansions of solutions of nonlinear partial differential equations of non-Kowalewskian type by using Mellin transformations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	800,000	240,000	1,040,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式, 偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 19世紀の後半から20世紀の初頭に

かけて、複素領域での常微分方程式の特異点の研究は数学解析の中心課題のひとつであ

った。リーマンによる3つの確定特異点を持つ2階線形微分方程式(ガウスの超幾何微分方程式)の大域解の構成(1858)、フックスによる確定特異点の特徴付け(1866-1868)、不確定特異点における形式解と真の解の対応関係を明らかにしたポアンカレの研究(1886)、パンルヴェによる動く特異点を持たない2階有理型微分方程式の分類(1900-1902)などは、その最も輝かしい成果である。以来、複素領域での特異点と微分方程式の関わりは、数学のあらゆる分野に陰に陽に顔を出しつつ、現代に至っている。しかし、偏微分方程式の枠組みの中に目を向けてみると、上に揚げたような成果に対応する研究は今までに十分成されてきた、とは言い難い。多変数の複素領域で「特異点と偏微分方程式の関わりを研究する」ことは、これからの数学のなすべき最大のテーマのひとつであると思われる。

(2) この研究グループが、長期計画で進めている研究テーマは次のとおりであった。一つの超曲面と一つの非線型偏微分方程式があるときに、次の3つの問題を研究せよ。①解でその超曲面に特異点を持つものは存在するのか?(特異点の存在と非存在の問題)②存在するとき、どのくらい多く存在するのか?(すべての特異点を決定できるかという問題)③特異点で解はどのような振る舞いをするのか?(漸近挙動の研究)

(3) 複素領域での非線型偏微分方程式の解の特異点の非存在に関する研究開始当初の背景は次のとおりであった。複素領域での超曲面に非特異な非線型偏微分方程式の場合、その超曲面上での解の特異点の非存在に関しては、小林(1998)とロペ・田原(2002)によってほぼベストな結果が得られていた。方程式が超曲面に関して特異な場合には、特異点の非存在は、解の一意性の系として、いくつかのケースに結果が得られていた。

(4) 一方、解の特異点の存在については、具体的に特異点を構成すれば良く、それは超曲面に確定特異点を持つある種の非線型偏微分方程式の解の存在問題に帰着されることは分かっていた。この帰着された方程式は3つのタイプに分類される。

タイプ1:非線型フックス型方程式と言われるもの、

タイプ2:空間的に非退化の方程式、

タイプ3:全特性的と言われるもの、

の3つである。タイプ1で、方程式の係数が正則の場合は、完全に解かれていた。タイプ2は、ある強い条件下での正則解の存在は知られているが、一般的な状況では未解決である。タイプ3も、空間変数に関して確定特異

点を持つ方程式のケースは解の存在は得られていたが、一般的な状況下では未解決である。これらの、帰着された方程式の解の存在が得られている場合には、もとの方程式の解の特異点の存在が示されていた。

## 2. 研究の目的

この期間における研究目的は次のとおりであった。超曲面とその上で確定特異点を持つ非線型偏微分方程式に対して、特異点の存在と非存在の条件を明らかにし、特異点が存在する場合には、すべての特異点を決定し、更に、その特異点での解の振る舞いの様子を決定すること。

## 3. 研究の方法

(1) 特異点の非存在は、解の一意性か解の解析接続によって調べる。

(2) すべての特異点を決定するには、その方程式の簡単な標準形を求め、その標準形の方程式のすべての解を決定すればよい。標準形は、最近この研究グループが開発している「カップリング方程式の手法」を使う。

(3) 解の特異点での振る舞いの様子は、その解の特異点での漸近展開を求めることにより実行する。

(4) また、形式解は構成できるが、それが発散級数になっている場合には、エカル・ラミス達によるボレル総和可能性の手法を適用する。

## 4. 研究成果

(1) 特異点をもつ偏微分方程式の変換論を研究した。その変換の方程式は無変数を含むが、その変換の方程式が、無限変数の正則解を持つことを示した。結果として、タイプ1の一階の場合のブリオ・ブーケー型と呼ばれる方程式の場合には、それが簡単な標準型に変換されることが分かった。応用として、ブリオ・ブーケー型の非線型偏微分方程式のすべての特異点をもつ解の決定に成功した。(論文①④)

(2) タイプ2の全特異的な非線型偏微分方程式の解の一意性について、従来の結果をよりシャープにする形での証明に成功した。これにより、全特異的な方程式の解の特異点の非存在の結果が改良された。(論文②)

(3) タイプ1で係数に特異点を含むケースの非線型偏微分方程式の解の存在を証明した。その応用として、超曲面に対して非特異的な非線型偏微分方程式の解で対数的特異点をもつものの存在が示された。対数的特異

点の存在については、今まで、いくつかの例では知られていたが、一般的な方程式に対して得られたのは、この結果が初めてであると思われる。(論文③)

(4) 非コワレスキー型の非線型偏微分方程式の場合に、解の特異点での漸近展開をメルン変換を用いて決定した。この結果、発散する形式解の意味付けについて「もしも真の解が存在するならば、形式解はその真の解の漸近展開になっていて、剰余項はジェブレイ型の評価を満たす」ことが同時に示された。(論文⑤)

(5) (4)の手法を実領域に応用して、ジェブレイ級の滑らかさを持つ非線型偏微分方程式の解のジェブレイ族での正則性についての研究も行った。1992年の論文(Singular hyperbolic systems, VIII, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 39 (1992), 555-582)で線型偏微分方程式の場合に得た結果の非線型版の定理を得た。一般的な非線型偏微分方程式に対して、この種の解の正則性の定理の証明に成功したのは、これが初めてであると思われる。複素領域での解析の有用性の証である。(発表②③④)

(6) 複素領域での非線型偏微分方程式の形式的べき級数解の総和可能性の問題を研究した。この問題は、ボレル変換により、合成積・偏微分方程式の研究に帰着される。「この合成積・偏微分方程式の構造は、ジェラル・田原(Singular nonlinear partial differential equations, Vieweg, 1996)で展開されたマイエ型定理の構造に酷似している」ことが明らかになった。この知見は、総和可能性の問題への新しい研究方法を示唆していると思われる。つまり、「マイエ型定理の改良を通して、合成積・偏微分方程式の結果の改良を行い、それをベースにして、偏微分方程式の形式解の総和可能性の問題にアプローチする」という研究方法がクローズアップされて来たと言えよう。(発表①)

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① Hidetoshi Tahara, Coupling of two partial differential equations and its application, II - the case of Briot-Bouquet type PDEs -. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, 45 (2009), 393-449.
- ② Hidetoshi Tahara, A sharp form of the uniqueness of the solution of nonlinear

totally characteristic partial differential equations, Tokyo J. Math., 査読有, 31 (2008), 195-202.

③ Hidetoshi Tahara - Hideshi Yamane, Logarithmic singularities of solutions to nonlinear partial differential equations. J. Math. Soc. Japan, 査読有, 60 (2008), 603-630.

④ Hidetoshi Tahara, Coupling of two partial differential equations and its application. Algebraic Analysis of Differential Equations (edited by T. Aoki, H. Majima, Y. Takei and N. Tose), 査読有, 295-306, Springer, 2008.

⑤ Sunao Ouchi, The asymptotic behavior of singular solutions of some nonlinear partial differential equations in the complex domain. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, 44 (2008), 973-1026.

⑥ Kunio Yoshino - Yasuyuki Oka, Asymptotic expansions of the solutions to the heat equations with hyperfunctions initial value. Commun. Korean Math. Soc. 査読有, 23 (2008), 555-565.

⑦ Masanori Suwa - Kunio Yoshino, A proof of Paley-Wiener theorem for Fourier hyperfunctions with support in a proper convex cone by the heat kernel method. Complex Var. Elliptic Equ. 査読有, 53 (2008), 833-841.

⑧ Hidetoshi Tahara, Coupling of two partial differential equations and its application. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, 43 (2007), 535-583.

[学会発表] (計 14 件)

① 田原秀敏, An analogue of Maillet type theorem in convolution partial differential equations. 研究集会「第2回名古屋微分方程式研究集会」, 2010年03月17日, 名古屋大学理1号館.

② 田原秀敏, Gevrey regularities of solutions of nonlinear singular partial differential equations. RIMS 研究集会「超局所解析とその周辺」, 2009年10月19日, 関西学院大学・大阪梅田キャンパス.

③ 田原秀敏, Gevrey regularities of solutions of nonlinear singular partial differential equations. 2009年度日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月24日, 大阪大.

④ Hidetoshi Tahara, Gevrey regularities of solutions of nonlinear singular partial differential equations, 7th ISAAC Congress, 2009年7月14日, Imperial College, London.

- ⑤ 田原秀敏, Coupling of two partial differential equations and its application. 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2008年12月21日, 京都大学理学部6号館,
- ⑥ Hidetoshi Tahara, On a reduction of Briot-Bouquet type partial differential equations in a resonant case. Journees franco-japonaises en l'honneur de Kazuo Okamoto, 2008年11月11日, Universite Louis Pasteur, Strasbourg (France).
- ⑦ 田原秀敏, On a reduction of Briot-Bouquet type partial differential equation in a resonant case, Workshop on New approach to analytic equations, transformation theory, singular solutions and Stokes problem. 2008年09月19日, 数理解析研究所.
- ⑧ 田原秀敏, On the singularities of solutions of nonlinear partial differential equations in the complex domain. International Workshop on Global Behaviors of Differential Equations - Singularity and Transformation Theory -, 2008年09月10日, 広島大学理学研究科.
- ⑨ Hidetoshi Tahara, Coupling of two singular partial differential equations and its application. Banach Center Conference "Formal and Analytic Solutions of Differential Equations", 2008年08月12日, Mathematical Research and Conference Center in Bedlewo (Poland).
- ⑩ 田原秀敏, Coupling of two singular partial differential equations and its application. RIMS 研究集会「WKB 解析と超局所解析」, 2008年5月29日, 数理解析研究所.
- ⑪ 山根英司 - 田原秀敏, 非線型偏微分方程式と対数的特異性. RIMS 研究集会「WKB 解析と超局所解析」, 2008年5月27日, 数理解析研究所.
- ⑫ 田原秀敏, Coupling of two singular partial differential equations and its application. 2008年度日本数学会年会, 2008年03月23日, 近畿大.
- ⑬ 山根英司 - 田原秀敏, 非線型偏微分方程式の解が持つ対数的特異性について. 2008年度日本数学会年会, 2008年03月23日, 近畿大.
- ⑭ Hidetoshi Tahara, Coupling of two singular partial differential equations and its application - a dream of R. Gerard -, Conference on holomorphic PDEs, small divisors and summability, 2008年01月31日, CIRM at Luminy (Marseille, France).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田原 秀敏 (TAHARA HIDETOSHI)  
上智大学・理工学部・教授  
研究者番号: 60101028

### (2) 研究分担者

大内 忠 (OUCHI SUNAO)  
上智大学・理工学部・教授

研究者番号: 00087082

(H20→H21: 連携研究者)

内山 康一 (UCHIYAMA KOICHI)

上智大学・理工学部・名誉教授

研究者番号: 20053689

(H20→H21: 連携研究者)

加藤 昌英 (KATO MASAHIDE)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号: 90062679

(H20→H21: 連携研究者)

平田 均 (HIRATA HITOSHI)

上智大学・理工学部・講師

研究者番号: 20266076

(H20→H21: 連携研究者)

吉野 邦生 (YOSHINO KUNIO)

東京都市大学・知識工学部・教授

研究者番号: 60138378

(H20→H21: 連携研究者)

### (3) 連携研究者

研究者番号: