

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2007～2010

課題番号：19540202

研究課題名(和文) 抽象的な代数を援用した偏微分方程式系の研究

研究課題名(英文) Study on systems of partial differential equations applying the abstract algebra

研究代表者

松本 和一郎 (MATSUMOTO WAICHIRO)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：40093314

研究成果の概要(和文):(1) 表象に極を認めると、コワレフスキアンに相似であることが南雲型の Cauchy-Kowalevskaya 定理が成り立つために必要であることを証明した。十分性については、モデルでの証明には成功しているが、一般化するには標準形を改良する必要があることが分かった。(2) 係数が時間変数のみに依存する系において「双曲型 Fuchsian に一様対角化可能」が強双曲系であるための必要十分条件であることを証明した。(3) p-放物系の新しい定義による研究の成果は不満足であった。

研究成果の概要(英文):(1) We have shown that, for the Cauchy-Kowalevskaya theorem on a system, it is necessary that the system is similar to Kowalevskian accepting poles on symbols. On the sufficiency, we have succeeded to prove it on some models, but we need refine on the normal form in order to treat the general case. (2) On the systems with coefficients depending only on the time variable, it is necessary and sufficient for the strong hyperbolicity that the system is uniformly diagonalizable as a hyperbolic Fuchsian. (3) The study under the new definition of the p-parabolic system is not satisfactory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：偏微分方程式論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：(1) 南雲型の Cauchy-Kowalevskaya の定理 (2) 擬 Jordan 標準形

(3) 系の行列式理論 (4) p-parabolic system (5) 強双曲系 (6) 超弱双曲系

## 1. 研究開始当初の背景

## (1) 南雲型の Cauchy-Kowalevskaya の定理

本来の Cauchy-Kowalevskaya 定理は、係数が時間変数にも空間変数にも解析的に依存する微分作用素を対象にしている。単独高階

方程式の場合にこの定理が成り立つための必要十分条件は、微分作用素の全変数に関する微分の階数が時間微分の最高階を超えない(いわゆるコワレフスキアン)ことである。報告者は偏微分方程式系の場合に、擬微分作

用素を成分とする非可換環上の行列式を用いて、この定理が成り立つための必要十分条件を与えている。この条件は、有理型形式的表象の世界で微分作用素が1階系に変換できることを意味している。(系の場合は、当初の作用素は全変数に関する微分階数が時間変数に関する微分の最高階を超えていてもよい。)一方、南雲は単独高階の場合に、微分作用素の係数が空間変数に関して解析的ならば、時間変数に関しては連続でも、ただ1つの解を持つことを示した。いわゆる南雲型の Cauchy-Kowalevskaya 定理である。報告者は、系の場合に同様の定理を得るためには、系の空間微分に関する階数と系の大きさの積におおむね比例する係数の時間変数に関する微分可能性が必要であることを示している。

#### (2) 強双曲系

主要部の特性根が実に限るコワレフスキアンを双曲型という。特に、低階項の選び方にかかわらず、初期値問題が $C$ 無限級の初期値・右辺に対してただ1つの解を持つ場合、強双曲型という。単独高階方程式の場合は、強双曲型であるための必要十分条件は「効果的に双曲型」であることである。1階系の場合は、定数係数の場合にのみ強双曲型のための必要十分条件が知られていた。係数が時間変数にのみ依存する系の場合には、双対変数を固定した行列に関する必要条件が山原氏(大阪電気通信大学)と報告者によって得られていて、空間変数が1の場合には十分条件でもある。しかし空間変数が2以上の場合には十分性には付加条件が必要であることが分かっているが、それが何であるかは分かっていない。

#### (3) p-放物系

系に関してはペトロフスキーによるヴォレヴィッチの補題に基づく放物型の定義があるが、正則な線形変換に不変でない。報告者は、擬微分作用素を成分とする行列の p-行列式を用いた新たな p-放物型を定義した。これは正則な線形変換に不変である。

### 2. 研究の目的

#### (1) 南雲型の Cauchy-Kowalevskaya の定理

南雲型の Cauchy-Kowalevskaya が成り立つための必要十分条件を確立する。本来の Cauchy-Kowalevskaya の定理の場合の必要十分条件がそのまま南雲型においても必要十分となることが予想される。

#### (2) 強双曲系

強双曲系であるための必要十分条件を得る。少なくとも、係数が時間変数にのみ依存する場合の必要十分条件を確立する。(空間変数が2以上の場合のみ未解決)

#### (3) p-放物系

報告者が定義した p-放物系に対する初期

値問題が $C$ 無限級の有界な初期値・右辺に対してただ1つの有界な解を持ち、時間正の領域で解は空間変数に関して解析的になることを示す。

### 3. 研究の方法

#### (1) 南雲型の Cauchy-Kowalevskaya の定理

必要条件の証明は帰謬法による。条件が満たされないときに、双対変数の錘近傍をうまく取り、解の超局所エネルギーの挙動を調べる。十分性の証明は、系に適当な微分作用素を掛けて、系の全変数に関する微分の階数が時間微分の最高階を超えないように変形できることを示す。そのために、整域でない非可換体上で行列式の理論と余因子展開の公式にあたる理論を開発する。

#### (2) 強双曲系

1階双曲系において、時間変数  $t$  を掛けると一様に正則になる行列による相似変換で、1階部分が対角の双曲型のフックシアンに帰着できて、かついかなる低階も0階に留まるならば、強双曲型であることは明らかである。1階部分が、時間変数にのみ依存する場合、この条件は必要条件でもあると思われる。必要性の証明は帰謬法による。条件が満たされない場合に、うまく双対変数の列を取り、超局所エネルギーの挙動を調べる。

#### (3) p-放物系

半群を構成するために、レゾルベントの評価を行う。

### 4. 研究成果

#### (1) 南雲型の Cauchy-Kowalevskaya の定理

必要条件の証明は帰謬法による。条件が満たされないときに、双対変数の錘近傍をうまく取ると、解の超局所エネルギーが指数的に増大することを、「溝畑の - メソッド」で示す。南雲型の場合、時間変数に関して $C$ 無限級だから、表象を止めどなく漸近展開すると収拾がつかなくなる。漸近展開の長さは指定した有限に止め、それ以上の展開にあたる部分は、空間変数だけの擬微分作用素の主要部の行列式が0にならなければ逆が構成できることを用いる。そうすると空間変数の解析性だけにより、剰余項が有界に止まることが示せる。このとき、表象は時間変数をパラメータとして持つが、パラメータの微分は必要ないから、当初の方程式の係数は、時間変数に関して十分高い微分可能性があればよい。十分性の証明は、系に適当な微分作用素を掛けて、系の全変数に関する微分の階数が時間微分の最高階を超えないように変形できることを示す。そのために、整域でない非可換体上で行列式の理論と余因子展開の公式にあたる理論を開発する。一般論はまだ完成していないが、時間微分が1階、空間微分が2階の場合、2階部分のランクが2以下の場合

には、ほぼ必要とする基礎理論が得られた。具体的には、時間微分に関して1階・空間微分に関して2階のシステムで、 $2 \times 2$ と $3 \times 3$ の場合とサイズに制限はないが2階部分のランクが1以下の場合は完全な証明が確立した。この制限下での結果を一般の場合まで拡張するには、報告者が示した「有理系形式的表象の世界での系の擬ジョルダン標準形」の詳細化が必要であることが分かってきた。現在の理論では、変換の不変量が不明である。現在の標準形をさらに詳細に変換することで、不変量が浮かび上がることが分かってきた。残念ながら、未完成である。標準形の構造が明確になってきたので、完全解決も遠くないと予想される。

この課題が完全解決を見た場合、本来のCauchy-Kowalevskaya 定理の完全解決に比べると相対的に素人受けしにくい、南雲型の場合、結果の予想が全く無かったこと・十分性の証明の手法を新たに開発するしかなかったことから、逆に手法の開発が伴い、将来の非線形も含めた系の研究に資するところが大きい。現時点では一般的解決を見ていないので、現在の成果に対しては、掲げた目的に比して高い評価は与えられないが、応用上必要とされる程度のことは既にカバーできている。

## (2) 強双曲系

1階双曲系において、時間変数  $t$  を掛けると一様に正則になる行列による相似変換で、1階部分が対角の双曲型のフックシアンに帰着できてかつ低階が0階に留まれば、強双曲系であることは明らかである。係数が時間変数にのみ依存する場合には、この条件は必要条件でもあることが一部示されている。このたび、すべてが必要条件であることの証明に成功した。この条件の必要性は帰謬法による。条件が満たされない場合に、うまく双対変数の列を取ると、超局所エネルギーの挙動がアプリアリ評価に反することが示せた。これにより、既に得られている結果とあわせると、係数が時間変数にのみ依存する場合の強双曲系の特徴付けは完全解決を見た。係数が時間変数にのみ依存する場合は、どちらかというとき定数係数の場合に近いが、時間変数に依存することにより、フックシアンが必要となり、系の変換のたびにフックシアンから逸脱しないことを示す必要がある。注意深い観察と推論が必要である。この項の後半に述べることから、係数が空間変数にも依存した場合、強双曲系の特徴付けが極めて難しい問題であると予見できるから、係数が時間変数にのみ依存する場合だけでも完全解決したことは意義深い。

係数が時間変数にも空間変数にも依存する一般の場合の研究は、直接強双曲系の特徴付けをするのではなく、 $C$ 無限適切となるた

めの低階項に関する条件、いわゆるレビ条件を調べ、レビ条件が低階を全く制限していない場合が強双曲系である、という考え方で研究を進めた。その結果、西谷により、単独高階では現れない「超弱双曲系」というべき未知のカテゴリーが存在することが分かった。これは、世界の誰も予想していなかった発見で、高く評価される。(日本数学会の解析学賞を受賞した。)この結果は、特性根が2重以下であることを仮定して、単独高階の場合は妥当な制限であるが、系の場合は必要性からは遠い強い仮定である。系の場合は、主要部が解析的係数を持ち「ジェネリック」な場合であっても、なお強双曲系の特徴付けは道が遠いと思われる。

## (3) $p$ -放物系

半群を構成するために、レゾルベントの評価を行うことを目指していたが、担当の分担者が研究機関を移動したと報告者が多忙であったために十分な成果を挙げるに到らなかった。

報告者が、この科学研究費補助金による研究に着手して半年後に、龍谷大学に新規に設置された教学企画部の部長を学長から拝命し、大学教育開発センター長も兼任することになった。多忙のため、この研究期間中に得られた結果を論文の形で公表する余裕がなかったことは残念である。今後、この研究費補助金による成果であることを明記して一連の論文を発表する。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 27件)

H. Murakawa and H. Ninomiya: Fast reaction limit of a three-component reaction-diffusion system, *Journ. Math. Anal. Appl.*, 査読有、379, 2011, (1), 150-170.

T. Nishitani and M. Tamura: A class of Fourier integral operators with complex phase related to the Gevrey classes, *Journ. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* vol 1, 査読有、2010, 255-292.

T. Ito, B. Scardua, and Y. Yamagishi: Transversality of complex linear distributions with spheres, contact forms and Morse type foliations, *Journ. Geometry Physics*, 査読有、vol. 60, 2010, 1370-1380.

T. Ito, B. Scardua: A non-existence

theorem for Morse type holomorphic foliation of codimension one transverse to spheres, Intern. Journ. of Math., 査読有、vol. 21 (4), 2010, 435-452.

C. Bandle, Y. Kabeya and H. Ninomiya: Imperfect bifurcations in nonlinear elliptic equations on spherical caps, Communications on Pure and Applied Analysis, 査読有、vol. 9 (5), 2010, 1189-1208.

J.-S. Guo, H. Ninomiya and J.-C. Tsai: Existence and uniqueness of stabilized propagating wave segments in wave front interaction model, Physica D: Nonlin. Phenomena, 査読有、vol. 239 (3-4), 2010, 230-239.

T. Wakasa and S. Yotsutani: Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems, Commun. Pure Appl. Anal. 査読有、vol. 9 (1), 2010, 539-561.

T. Nishitani: On Gevrey well-posedness of the Cauchy problem for some non-effectively hyperbolic operators, Advances in Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, Birkhauser, 査読有, 2009, 217-233.

T. Ito and B. Scardus: Holomorphic foliations transverse to manifolds with corner, Discrete and continuous dynamical systems, 査読有、vol. 25, 2009, 537-544.

F. Colombini and T. Nishitani: Second order weakly hyperbolic operators with coefficients sum of powers of functions, Osaka J. Math. 査読有、vol. 44, 2007, 121-137.

F. Colombini and T. Nishitani: An example of the Cauchy problem well posed in any Gevrey class, Annali Mat. Pura Appl. 査読有、vol. 186, 2007, 521-643.

[学会発表](計 14件)

西谷達雄: 非効果的双曲型方程式の初期値問題と Gevrey 空間、2010 年度日本数学会年会、函数方程式論分科会特別講演、2010年3月24日、慶応大学。

西谷達雄: 2次特性点を持つ双曲型作用素と Gevrey クラス、2008 年度日本数学会年会、函数方程式論分科会特別講演、2008

年3月23日、近畿大学。

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松本 和一郎 (MATSUMOTO WAICHIRO)  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号: 40093314

### (2) 研究分担者

四ツ谷 晶二 (YOTSUTANI SHOJI)  
龍谷大学・理工学部・教授  
研究者番号: 60128361

伊藤 敏和 (ITO TOSHIKAZU)  
龍谷大学・経済学部・教授  
研究者番号: 60110178

二宮 広和 (NINOMIYA HIROKAZU)  
明治大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 90251610

西谷 達雄 (NISHITANI TATSUO)  
大阪大学・理学研究科・教授  
研究者番号: 80127117

### (3) 連携研究者