

平成22年 3月10日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2007～2009
 課題番号：19540204
 研究課題名（和文） 2次元複素双曲空間に作用する $PU(1,2;\mathbb{C})$ の離散部分群に関する研究
 研究課題名（英文） Study on discrete subgroups of $PU(1,2;\mathbb{C})$ acting on complex hyperbolic 2-space
 研究代表者
 神谷 茂保 (KAMIYA SHIGEYASU)
 岡山理科大学・工学部・教授
 研究者番号：80122381

研究成果の概要（和文）： 2次元複素双曲空間に作用する $PU(1,2;\mathbb{C})$ の離散部分群に関する研究をおこなった。

(1) 離散群の研究において、群が離散性を持つための条件を見出すことは重要である。放物型の元を持つ $PU(1,2;\mathbb{C})$ の部分群に対して複素双曲版清水の補題を得た。これを用いて離散群の基本領域を構成する上で役立つ *precisely invariant region* を構成した。

(2) 複素双曲三角群について考察しその離散性を議論した。離散的な複素双曲三角群を見つけ出した。

研究成果の概要（英文）： We have studied discrete subgroups of $PU(1,2;\mathbb{C})$ acting on complex hyperbolic 2-space.

(1) It is important to find out some conditions for a group to be discrete. For a subgroup of $PU(1,2;\mathbb{C})$ containing a parabolic element, we obtain a complex hyperbolic version of Shimizu's lemma. Using this, we can construct a *precisely invariant region*, which is useful for construction of fundamental domain for a discrete group.

(2) We have studied complex hyperbolic triangle groups and discussed their discreteness. We found several discrete complex hyperbolic triangle groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：離散群論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：離散群、複素双曲空間

1. 研究開始当初の背景

実双曲空間に作用するクライン群の研究は1964年の極限集合に関する Ahlfors 予想、1970年代のクライン群の変形理論 (Teichmüller 空間論)、また1970年代終わり頃からの (Poincaré 予想を含む) Thurston の幾何化予想などに関連して発展してきた。一方複素双曲空間に関する研究はまだ発展途上の段階にある。一般の次元での考察では幾何学的な対象が複雑すぎる場合があること、2次元での研究により一般の次元の場合の様子がかなりわかることなどから現在は2次元の研究が中心になっている。2次元複素双曲空間に作用する等長変換群 $PU(1,2;\mathbb{C})$ の研究は初期段階であるが内容は実双曲空間に作用するクライン群に勝るとも劣らぬ豊富さであることがわかってきた。しかし実双曲空間の類似物と、とらえられ研究の意義が十分に理解されているとは言い難い状況であった。1994年のオクラホマでのアメリカ数学会での special session において初めてこの分野の研究者が集まり国際的な研究集会を行った。2002年 R.Schwartz が北京での ICM において複素双曲三角群に関する招待講演を行い隣接諸分野の研究者の関心をこの分野へむけさせる役割を果たした。オクラホマでの研究集会の後も何回も国際会議が開催され研究交流を行い、共同研究も活発に行われるようになってきた。現在はヨーロッパを中心に研究が進められている。また中国、韓国でもこの分野に関心をもつ若い研究者が増えてきている。今後もしろいろな分野との関連が発見され発展していくものと思われる。

2. 研究の目的

2次元複素双曲空間に作用する $PU(1,2;\mathbb{C})$ の離散部分群の実例を見出すこと、また $PU(1,2;\mathbb{C})$ の離散部分群の性質を詳細に研究することである。

3. 研究の方法

$PU(1,2;\mathbb{C})$ の部分群の離散性を判定するための条件を見出すために $PU(1,2;\mathbb{C})$ の個々の元の性質、作用を研究する。離散性の判定には複素双曲版清水の補題のような「道具」が必要でありそれらを整備すること、また \mathbb{R} -平面、 \mathbb{C} -平面などのような基本領域の形成に必要な不可欠なものの性質を調べることも重要である。具体的にそれらを活用し $PU(1,2;\mathbb{C})$ の離散部分群を見つけ出すために、まず複素双曲三角群の場合に研究を行ってきた。

4. 研究成果

(1) 2次元複素双曲空間に作用する等長変換群 $PU(1,2;\mathbb{C})$ の部分群が (放物型の元、特に translation や Heisenberg translation を含む場合の複素双曲版清水の補題については既に結果を得ていたが) 一般の放物型の元 (screw parabolic) もつ場合の複素双曲版清水の補題を見出した。これは今までに得た結果の拡張にもなっている。 $PU(1,2;\mathbb{C})$ での一般の放物型の元は「実」の場合と作用が異なるのでこの複素双曲版清水の補題は実双曲版清水の補題とかなり異なるものになっている。これを用いることによりこの放物型の元の固定点の固定群の作用がこの群全体の作用と一致するような領域である precisely invariant region を構成することができた。(複素双曲版清水の補題に関する別の結果もあるがそれではこのような precisely invariant region を構成することは不可能であった。)

この precisely invariant region は $PU(1,2;\mathbb{C})$ の離散部分群の基本領域の構成に際して重要な役目を果たす。

(2) $PU(1,2;\mathbb{C})$ の部分群である複素双曲三角群の離散性について考察した。複素双曲三角形は実双曲三角形の場合とは異なり、その内角から一意的にはきまらない。複素双曲三角形の内角が $\pi/p, \pi/q, \pi/r$ のとき複素双曲三角形の3辺それぞれを固定する3つの複素鏡映写像から生成される $PU(1,2;\mathbb{C})$ の部分群を (p, q, r) 型の複素双曲三角群とよぶ。ここで p, q, r は3以上の自然数で ∞ でもよいとする。R.Schwartz は (∞, ∞, ∞) の複素双曲三角群の離散性に関する Goldman-Parker の予想を解決したが一般場合は未知な部分が多い。 (p, q, r) 型の複素双曲三角群は (実双曲三角群の場合とは異なり) 共役を除いて1-パラメータの族をなすことがわかる。上記の生成元からつくられる特別な元の位数 k を決めると対応する複素双曲三角群が一つ決まる。この群を $(p, q, r; k)$ 型の複素双曲三角群とよぶことにする。

①複素双曲版清水の補題を用いて (n, n, ∞) 型の複素双曲三角群がいつ離散的ではなくなるかを調べた。次に Pratoševitch の3つの生成元の積に関する結果を用いて

(n, n, ∞) 型の複素双曲三角群の離散性を調べた。これらにより (n, n, ∞) 型の複素双曲三角群の1-パラメータ族のどこに非離散的な群が存在するかを示した。

②次に $(n, n, \infty; k)$ 型の複素双曲三角群の離散性を調べた。 n が29以上のときは全て非離散的とわかった。 n が29以下の場合について離散的ではない群、離散的な群を区別して列挙した。このため Conway の三角関数に関する

る結果を変形して用いた。また群の元を行列表示した際の各元を表す行列の要素の存在する環を調べることと Pratoševitch による行列のトレースに関する結果を用いることにより具体的に離散的な複素双曲三角群の例を示した。

③ $(p, q, r; k)$ 型複素双曲三角群の p, q, r, k の間の関係を示し、別の型との関連を示した。これにより研究対象を少なくすることができた。また $(p, q, r; k)$ などの表示を変える際の不変量も見出した。また楕円型の元に関する複素双曲版 Jorgensen 不等式を用いて $(n, n, \infty; k)$ 型の複素双曲三角群の場合は 29 であったが一般の $(p, q, r; k)$ 型複素双曲三角群の場合 p, q, r の最小値が 31 以上のときは非離散的になることも示した。いまのところ $(n, n, \infty; k)$ 型の複素双曲三角群のところで示した 29 が best possible かどうかはわかっていない。もっと小さな値になるものと思われる。

④ $(p, q, r; k)$ 型の複素双曲三角群の離散性について調べ離散的な群を列挙した。この研究からも cofinite な複素双曲三角群の個数は非常に少ないのではないかと思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① S. Kamiya, J. Paker and J. Thompson:
Non-discrete complex hyperbolic triangle groups of type $(n, n, \infty; k)$ (to appear in Canadian Mathematical Bulletin).
(査読あり)

② S. Kamiya and J. Paker:
Discrete subgroups of $PU(1, 2; \mathbb{C})$ with screw parabolic elements, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 144 (2008), no. 2, 443-455.
(査読あり)

③ S. Kamiya:
Shimizu's lemma for complex hyperbolic space, Proceedings of the 11th International Conference on Real and Complex Analysis, Hiroshima University, (2008), 76-80.
(査読なし)

④ S. Kamiya:
Remarks on complex hyperbolic triangle groups, Complex Analysis and its Applications, (2008), 219-223, Osaka Municipal Universities Press. (査読あり)

⑤ M. Yamasaki:
3-manifolds and 4-dimensional rigidity, Intelligence of Low Dimensional Topology, (2007), 361-366 (査読あり)

⑥ S. Murakami and Y. Nagabuchi:
Invariant manifold for abstract functional differential equations and related Volterra difference equations, Funkcial. Ekvac., vol. 50 (2007), 133-170.
(査読あり)

[学会発表] (計 11 件)

① S. Kamiya:
Non-discrete complex hyperbolic triangle groups of type $(n, n, \infty; k)$, Sogang University, South Korea, 2009 年 9 月 24 日

② S. Kamiya:
Non-discrete complex hyperbolic triangle groups of type $(n, n, \infty; k)$, Pusan National University, South Korea, 2009 年 9 月 18 日

③ S. Kamiya:
Non-discrete complex hyperbolic triangle groups of type (n, n, ∞) II, Seoul National University, South Korea, 2009 年 9 月 11 日

④ S. Kamiya:
Complex hyperbolic version of Shimizu's lemma and its applications, Pohang University of Science and Technology, South Korea, 2009 年 9 月 7 日

⑤ S. Kamiya:
Non-discrete complex hyperbolic triangle groups of type (n, n, ∞) I, Korea Institute for Advanced Study, South Korea, 2009 年 6 月 4 日

⑥ S. Kamiya:
Non-discrete complex hyperbolic triangle groups, Durham University, UK, 2009 年 1 月 29 日

⑦ S. Kamiya:
Shimizu's lemma for complex hyperbolic space, International Workshop on potential Theory 2008, Tokyo, Japan, 2008 年 12 月 18 日

⑧ S. Kamiya:
Shimizu's lemma for complex

hyperbolic space and its application,
The 35th Symposium on Transformation Groups
2008, Okayama, Japan,
2008年11月12日

⑨S. Kamiya:
Complex hyperbolic triangle groups,
International Conference on
Complex Analysis and Related Topics,
Alba Iulia, Romania,
2008年8月18日

⑩S. Kamiya:
Discrete subgroups of $PU(1, n; \mathbb{C})$,
London Mathematical Society,
Alan Beardon's retirement
meeting, Cambridge, UK,
2007年12月5日

⑪S. Kamiya:
Remarks on complex hyperbolic triangle
groups, 15th International Conference on
Finite or Infinite Dimensional
Complex Analysis, Osaka, Japan,
2007年8月1日

[図書] (計1件)

①神谷茂保(他5名): 数学定数事典(翻訳)、
朝倉書店、2010年 587ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

神谷 茂保 (KAMIYA SHIGEYASU)
岡山理科大学・工学部・教授
研究者番号: 80122381

(2) 研究分担者

山崎 正之 (YAMASAKI MASAYUKI)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号: 70174646

竹中 茂夫 (TAKENAKA SHIGEO)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号: 80022680

村上 悟 (MURAKAMI SATORU)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号: 40123963

示野 信一 (SHIMENO NOBUKAZU)
岡山理科大学・理学部・准教授
研究者番号: 60254140

(3) 連携研究者 ()

研究者番号: