様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　６月２６日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2008
課題番号：１９５４０２０５
研究課題名（和文）　単位球上の単葉正則写像に関する研究

研究課題名（英文）　A study on univalent holomorphic mappings on the unit balls

研究代表者
濱田　英隆（HAMADA　HIDETAKA）
九州産業大学・工学部・教授
研究者番号：３０１９８８０８

研究成果の概要：
A がある条件を満たす正方行列であるとき、ユークリッド単位球上で、A 漸近的螺旋形正則写像の概念と A パラメーター表現を持つ単葉正則写像の概念が同一であることを示した。また、複素バナッハ空間の単位球上の星形正則写像の様々な部分族に対する精密な増大度定理、被覆定理および係数評価式を与えた。更に、単位円盤上の正則関数に対する Bohr の定理を、複素バナッハ空間の有界 balanced 領域から複素バナッハ空間内の等質単位球への正則写像に拡張した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	500,000	150,000	650,000
２００８年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
年度			
総　計	900,000	270,000	1,170,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：複素解析

１．研究開始当初の背景

単位円盤 U 上の単葉正則関数で、$f(0)=0$, $f'(0)=1$ を満たすものに対しては、増大度定理 $|z|/(1+|z|)^2 \leqq |f(z)| \leqq |z|/(1-|z|)^2$ が成り立つことが知られている。また、$f(z)=z+\Sigma a_m z^m$ のとき、係数評価式 $|a_m| \leqq m$ ($m \geqq 2$)が成り立つことが知られている。H. Cartan は、これらの結果は多変数の単葉正則写像については成り立たないことを指摘し、星形正則写像，凸写像について研究するよう勧めている。

(1) R. W. Barnard, C. H. FitzGerald and S. Gong, M. Chuaqui は上記の増大度定理を C^n 内のユークリッド単位球 B^n 上の正規化された星形正則写像(type 0 の螺旋型正則写像)に拡張した。H. Hamada and G. Kohr は、まず、正規化された type α の螺旋型正則写像を subordination chain を用いて特徴づけ、その subordination chain を応用して上記の増大度定理をもっと一般的な type α の螺旋型正則写像に拡張した。また、より一

般的な螺旋型正則写像については、増大度定理 が成り立たない例を示した。さらに、I. Graham, H. Hamada and G. Kohr は、単葉正則写像全体の族の部分族で、type α の螺旋型正則写像を含み、上記の増大度定理が成り立つ族 $S^0(B^n)$ を subordination chain を用いて記述した。また、subordination chain に埋め込める単葉正則写像で増大度定理が成り立たない例も示した。

(2) S. Gong は、多重円盤 U^n 上の星型写像に対する係数評価式 $|a_m|\leqq m$ が m=2,3 のときに成り立つことを示した。
I. Graham, H. Hamada and G. Kohr は、$S^0(B^n)$ の部分族 $S_g^0(B^n)$ に対する増大度定理、被覆定理および係数評価式を 関数 g を用いて記述した。T. Liu and X. Liu は、$f(z)-z$ が、B^n 上の z=0 で k+1 位の零点を持つ星型写像や位数 α の星型写像のとき、精密な(sharp)増大度定理と被覆定理を得た。T. Liu and X. Liu は、$f(z)-z$ が, B^n 上の z=0 で k+1 位の零点を持つ星型写像や位数 α の星型写像のとき、精密な(sharp)係数評価式を得た。H. Hamada, T. Honda and G. Kohr は、$f(z)-z$ が、z=0 で k+1 位の零点を持つ $S_g^0(B^n)$ に属する写像に対する増大度定理、被覆定理および係数評価式を関数 g を用いて記述した. $g(z)=(1-z)/(1-(2\alpha-1)z)$ のとき、$S_g^0(B^n)$ は位数 α の星型写像全体の集合と一致するので、上記の T. Liu and X. Liu の結果の拡張となっている。

２．研究の目的

(1) 上記からも分かるとおり、単葉正則写像の像の幾何学的性質が増大度定理に重要な影響を与えている。そこで、本研究では、まず、$S^0(B^n)$ に属する単葉正則写像による像の（星形、螺旋型のような）幾何学的特徴づけを行いたい。更に、上記の増大度定理が成り立つ、より大きい正則写像の族 $S^1(B^n)$、できれば最大の族 $S^2(B^n)$ を見つけたい。それらの族の解析的特徴づけ、幾何学的特徴づけ、subordination chian による特徴づけを行いたい。

(2) 本研究では、上記で得られた、$f(z)-z$ が、z=0 で k+1 位の零点を持つ $S_g^0(B^n)$ に属する写像に対する増大度定理、被覆定理および係数評価式が、精密（sharp）であるための関数 g の十分条件について研究したい。すなわち、 g(U) がどのような（幾何学的）性質を持てば、増大度定理、被覆定理および係数評価式が、精密（sharp）となるかについて研究する。

３．研究の方法

(1) U^n を C^n 内の多重円盤、 B^n を C^n 内のユークリッド単位球とする。このとき、T. Poreda は、$f\in S^0(U^n)$ ならば、$f(U^n)$ が asymptotically starlike domain であることを示した。逆に、$f(U^n)$ が smoothly asymptotically starlike domain であるならば、$f\in S^0(U^n)$ であることも示した。本研究では、まず、T. Poreda の結果が、B^n に対して成り立つことを示す。次に、
① $f(B^n)$ が asymptotically starlike domain であるならば、$f\in S^0(B^n)$ であるか?
② $f\in S^0(B^n)$ ならば、$f(B^n)$ が smoothly asymptotically starlike domain であるか?
のいずれかの方法で、$f\in S^0(B^n)$ であることと $f(B^n)$ が (smoothly) asymptotically starlike domain であることが必要十分条件であることを示したい。もし、この方法が困難である場合には、
③ asymptotically starlike domain の新しい定義を考察し、$f\in S^0(B^n)$ であることと $f(B^n)$ が asymptotically starlike domain であることが必要十分条件であることを示す。
という方法を試してみる。更に、この $S^0(B^n)$ に属する単葉正則写像による像の（幾何学的）特徴づけをヒントにして、増大度定理が成り立つより大きい正則写像の族 $S^1(B^n)$、できれば最大の族 $S^2(B^n)$ を見つけたい。それらの族の解析的特徴づけ、幾何学的特徴づけ、subordination chian による特徴づけを行いたい。

(2) 星型写像全体の族、位数 p の星型写像全体の族、位数 p の強星型写像全体の族、位数 p の放物型星型写像全体の族の部分族で、$f(z)-z$ が z=0 で k+1 位の零点を持つ場合には、それぞれ増大度定理、被覆定理および係数評価式が精密（sharp）であることが知られている（精密な結果を与える写像が具体的に与えられている）。本研究では、これらの精密な場合を与える写像の構成方法を詳しく調べ、一般の $S_g^*(B^n)$, $S_{g,k+1}^*(B^n)$ の場合に、増大度定理、被覆定理および係数評価式の精密な結果を与える写像を構成したい。まず、n=1 の時、すなわち $S_g^*(U)$, $S_{g,k+1}^*(U)$ の場合について、増大度定理、被覆定理および係数評価式の精密な結果を与える写像が存在するための g の条件を求める。さらに、この結果を C^n の任意のノルムによる単位球 B, 複素ヒルベルト空間の単位球、複素バナッハ空間の単位球等に拡張したい。また、S. Gong は、U^n 上の星型写像のより詳細な係数評価式を得ている。本研究では、この結

果を $S_g^*(U^n)$, $S_{g,k+1}^*(U^n)$ に拡張したい。

４．研究成果

(1) 単位円盤上の単葉正則関数に対しては、精密な増大度定理、被覆定理および係数評価式が証明されている。多変数の単葉正則写像に対しては、特に、星形正則写像や、螺旋型正則写像に対して、増大度定理、被覆定理および係数評価式が証明されている。しかしながら、それらの評価式が、精密であるかどうかについては、ごく一部の場合を除いて、研究されていなかった。本研究では、複素バナッハ空間の単位球上の星形正則写像の様々な部分族に対する精密な増大度定理、被覆定理および係数評価式を与えた。今後の展望としては、より一般的な螺旋型正則写像の様々な部分族に対する精密な増大度定理、被覆定理および係数評価式について、星型正則写像の様々な部分族の場合と同様の結果が成り立つかどうかについて研究したい。

(2) 単位円盤上の正則関数に対する Bohr の定理を、複素バナッハ空間の有界 balanced 領域から複素バナッハ空間内の等質単位球への正則写像に拡張した。また、複素バナッハ空間が特に、J^*-代数の時は、得られた結果が、最良であることも示した。我々の結果は、2007年のLiu-Wangの結果を拡張したものであり、また、その証明方法もより簡明になった。

(3) Poreda は多重円盤上で、漸近的星形正則写像の概念とパラメーター表現を持つ単葉正則写像の概念が同一であることを示したが、不完全な物であった。本研究では、ユークリッド単位球上で、漸近的星形正則写像の概念とパラメーター表現を持つ単葉正則写像の概念が同一であることを示した。特に、星形正則写像と螺旋形正則写像が漸近的星形写像であることを示した。また、螺旋形正則写像で漸近的星形正則写像でない例を与えた。更に、単位円盤上の正規化された単葉正則関数は漸近的星形正則関数であるが、複素次元が２以上の単位球上の正規化された単葉正則写像は漸近的星形正則写像とは限らないことを示した。この結果は、増大度定理が成り立つことが知られている最大の単葉正則写像の族の像の幾何学的特長付けを与えている。今後の展望としては、多重円盤上やより一般的なバナッハ空間の単位球上で、漸近的星形正則写像の概念とパラメーター表現を持つ単葉正則写像の概念が同一であることの完全な証明を与える研究をしたい。

(4) 上記の研究において、A がある条件を満たす正方行列であるとき、ユークリッド単位球上で、A 螺旋型正則写像で、漸近的星形正則写像でない例を与えた。従って、多変数の単葉正則写像については、漸近的星形正則写像よりももっと一般的な物を考える必要がある。本研究では、A 漸近的螺旋形正則写像の概念と A パラメーター表現を持つ単葉正則写像の概念が同一であることを示した。特に、A 螺旋形正則写像が A パラメーター表現を持つ単葉正則写像であることを示した。また、A 螺旋形正則写像がパラメーター表現を持つ単葉正則写像であるための A に関する十分条件を求めた。更に、A 漸近的螺旋形正則写像の例を与えた。今後の展望としては、多重円盤上やより一般的なバナッハ空間の単位球上で、A 漸近的螺旋形正則写像の概念と A パラメーター表現を持つ単葉正則写像の概念の関係について研究したい。

(5) n 次元複素ユークリッド空間の単位球上の正規化されていない単葉な subordination chain と Loewner 微分方程式との関係について研究した。そのために、変換写像に対する初期値問題の最も一般的な形について研究し、解の存在と一意性を証明した。また、可測な行列値写像に関する一般化された螺旋型写像の概念を導入し、正規化されていない単葉な subordination chain の観点からこの概念を研究した。そのような螺旋型写像は、単葉なsubordination chain の第１要素として埋め込めることを証明した。また、対角行列値写像に関する螺旋型写像の様々な例を与えた。可測な行列値写像が、定数写像の時は、線形写像に関する通常の螺旋型写像の概念を得る。上記の応用として、正規化された対角行列値写像に関する螺旋型写像に対して、増大度定理を示した。今後の展望としては、多重円盤上やより一般的なバナッハ空間の単位球上で、正規化されていない単葉な subordination chain と Loewner 微分方程式との関係について研究したい。

(6) 単位円盤上の放物型星形正則関数に対しては、精密な増大度定理、被覆定理および係数評価式などが証明されているが、多変数の放物型星形正則写像に対する研究は、これまでなされていなかった。本研究では、C^n の任意のノルムに関する単位球上の放物型星形正則写像に対する精密な増大度定理、被覆定理および係数評価式を与えた。更に、様々な放物型星形正則写像の例を

与えた。１変数の場合は、放物型星形正則写像は、一様凸性と密接な関係にある。今後の展望としては、多変数の場合に、放物型星形正則写像と一様凸性について同様な関係があるかどうかについて研究したい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, Spirallike mappings and univalent subordination chains in C^n, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) 7 (2008), 717-740, 査読有り

② I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, Parametric representation and asymptotic starlikeness in C^n, Proc. Amer. Math. Soc., 136 (2008), 3963-3973, 査読有り

③ H. Hamada and T. Honda, Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables, Chinese Annals of Mathematics, Ser.B, 29 (2008), 353-368, 査読有り

④ I. Graham, H. Hamada, G. Kohr and M. Kohr, Asymptotically spirallike mappings in several complex variables, Journal d'Analyse Mathematique, 105 (2008), 267-302, 査読有り

⑤ H. Hamada, T. Honda and G. Kohr, Parabolic starlike mappings in several complex variables, Manuscripta Math., 123 (2007), 301-324, 査読有り

〔学会発表〕（計１件）

① 濱田　英隆、Asymptotic starlikeness in several compelx variables、平成19年度多変数関数論冬セミナー、平成19年12月23日、富山大学

６．研究組織
(1)研究代表者

濱田　英隆（HAMADA HIDETAKA）
九州産業大学・工学部・教授
研究者番号：30198808