

平成21年3月31日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2007 ~ 2008

課題番号：19540209

研究課題名 (和文) 擬軌道尾行性による鎖成分の特徴付けに関する研究

研究課題名 (英文) ON THE CHARACTERIZATION OF CHAIN COMPONENTS BY MEANS OF THE SHADOWING PROPERTY

研究代表者

酒井 一博 (SAKAI KAZUHIRO)

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：30205702

研究成果の概要：写像 f は微分可能閉多様体上の微分同相写像とし、 p を f のひとつの双曲型周期点とする。本研究の目的は、 p を含む f の鎖成分 $C_f(p)$ が C^1 -安定的擬軌道尾行性をもつとき、 $C_f(p)$ を双曲的なホモクリニッククラスとして特徴付けることである。平成19年度、 $C_f(p)$ -芽拡大性を仮定することによりその双曲性が証明された。平成20年度は、 $C_f(p)$ -芽拡大性の仮定を取り除くことに挑戦した。つい最近、報告者の研究成果にLiao理論を応用することにより、北京大学のグループが C^1 -安定的擬軌道尾行性をもつ鎖成分 $C_f(p)$ の双曲性の証明に成功した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：力学系理論

1. 研究開始当初の背景

Anosov-Bowenによる導入以来、擬軌道尾行性(shadowing property)の概念は力学系理論の研究において様々な場面で現れ、力学系の定性的理論の研究において常に重要な役割を担ってきた。近年、擬軌道尾行性理論の発展には特に目覚しいものがあり、力学系の数値計算的研究の基盤を固めるだけでなく、多くの興味深い定性論的研究結果も生み出されている。

力学系を数値計算的手法によって研究する場合、コンピュータにより計算された力学系の軌道には(一般に)四捨五入等による誤差が含まれている。このような軌道を擬軌道

(pseudo-orbit)と呼ぶ。もし、力学系が擬軌道尾行性(以下SPと表す)をもてば、すべての擬軌道はその力学系の真の軌道であることが保障され、コンピュータにより計算された力学系の軌道はその定性的性質を反映していると言える。すなわち、力学系の数値計算的手法による研究において精度保障を考慮する場合、その力学系がSPをもつかどうか非常に重要かつ基本的な問題となる。

一般に微分可能多様体 M 上すべての力学系(微分同相写像)がSPをもつとは限らないが、SPをもつ微分同相写像の全体は、微分同相写像全体の空間の中で C^0 -位相に関し稠密

になることが知られている。SP は、力学系の安定性に関する概念である。報告者は、ここ十数年 SP をもつ力学系の特徴付けについての研究を行ってきた。M 上の SP をもつ微分同相写像全体を $SP(M)$ で表し、その C^1 -位相に関する内点集合を $SP^i(M)$ で表す。報告者は

(I) $SP^i(M) =$ 双曲性 (Axiom A + 強横断性条件)

と特徴付けした。すなわち系 f が $SP^i(M)$ の要素であることと、 f が構造安定性を満たすことは同値である。

擬軌道尾行性理論における最も基本的な研究対象は、力学系 f の鎖回帰集合 (chain recurrent set) と呼ばれる f -不変閉部分集合 $R(f)$ である (非遊走集合 $\Omega(f)$ は $R(f)$ の部分集合である)。M の点 x から点 y へ、任意に誤差の小さい f の擬軌道が存在するとき、 $x \sim_f y$ と書く。 $R(f)$ は、 $x \sim_f x$ を満たす点 x の全体である。鎖回帰集合への制限 $f|_{R(f)}$ が SP をもつ微分同相写像全体の C^1 -位相に関する内点集合を $SP^i|_R(M)$ で表せば

(II) $SP^i|_R(M) =$ Ω -安定な力学系 (Axiom A + no-cycle)

として特徴付けされる。

Smale による微分幾何学的力学系理論は、双曲性と構造安定性という 2 つの概念を基礎として研究が開始され、「構造安定性と双曲性は同値」という Palis-Smale による C^r -構造安定性予想解決へ向けての研究が同理論の発展に大きな役割を果たした。 C^1 -構造安定性予想は 1987 年に Mane により解決され、その後 Hayashi-Aoki-Wen らによって一般化された形の C^1 -構造安定予想も証明された。上記 2 つの結果は、これらの成果の応用である。

力学系 f の双曲型周期点 p の安定多様体 $W^s(p)$ と不安定多様体 $W^u(p)$ の交点は、 p のホモクリニック点と呼ばれている。横断的に交わる p のホモクリニック点全体の閉包を p のホモクリニッククラス (homoclinic class) といい $H_f(p)$ で表す。よく知られているホースシューも (ある双曲型不動点の) ホモクリニッククラスである。ホモクリニッククラスは、力学系理論における基本的かつ最小な意味ある研究対象と言える。実際、その非遊走集合が有限個のホモクリニッククラスに分解されるような力学系は、力学系の全体の空間の中で C^1 -位相に関し一般的 (C^1 -generic) であることが示されている。

関係 \sim_f は $R(f)$ 上の同値関係であり、それによる同値類は鎖成分 (chain component) と呼ばれている。鎖成分はホモクリニッククラスの一般化であり、擬軌道尾行性理論における基本的かつ最小な意味ある研究対象 (f -

不変閉部分集合) である。擬軌道尾行性のもとで鎖成分を特徴付けることは大変興味深い問題である。

2. 研究の目的

微分可能閉多様体 M 上の微分同相写像 f の、ひとつの双曲的周期点を p とする。本研究では、上記 (I), (II) の研究成果を踏まえ、 M 上の微分同相写像 f の双曲型周期点 p を含む鎖成分 $C_f(p)$ を、SP に関する C^1 -位相についての (自然な) 安定性のもとで微分力学系理論の視点から特徴付けを行うことを目的とした。具体的には、周期点 p を含む鎖成分を $C_f(p)$ とする。このとき C^1 -安定的擬軌道尾行性をもつ鎖成分 $C_f(p)$ は、双曲的なホモクリニッククラス $H_f(p)$ であることの証明である。

最近では構造安定性理論を基礎にコンピュータ支援による力学系の分岐についての研究 (分岐理論) が盛んに行われ、その研究成果はカオスの研究等、工学を含む様々な分野で応用されつつある。分岐理論は (構造安定でない) 力学系の 1-パラメーター族において C^r -位相 (一般に r は十分大) の下でパラメーターと共にその軌道構造がどのように変化するかを調べる理論で、カオス現象を数学の立場で説明するためにはその研究が不可欠であることがわかってきている。

コンピュータ支援による分岐現象の研究では、鎖成分における分岐現象の解明が中心となる。擬軌道尾行性をもつ力学系は、ある程度一般的なクラスであるので、本研究により得られる結果や研究方法は、「分岐現象解明に向けての一般論的研究」において基本的役割を果たすことが期待できる。また、我々の研究目的が達成されれば (数学の立場での) カオスの研究にも大きく貢献できる。

3. 研究の方法

(1) 平成 19 年度: まず、鎖成分に対し、「自然な擬軌道尾行性 C^1 -開条件」を定義した。 $\text{Diff}(M)$ を多様体 M 上の微分同相写像全体とし C^1 -位相を導入する。力学系 $f \in \text{Diff}(M)$ から鎖回帰集合 $R(f)$ への対応は、Hausdorff-距離に関し上半連続であることが知られている。すなわち $R(f)$ の任意の近傍 U に対し、 $\delta > 0$ が存在して $\rho_1(f, g) < \delta$ ならば、 $R(g) \subset U$ が成り立つ (ρ_1 は C^1 -位相と同値な距離)。そこで $R(f)$ が C^1 -安定的擬軌道尾行性をもつことを、極自然に「 C^1 -位相に関し f に近い任意の $g \in \text{Diff}(M)$ に対し、 $g|_{R(g)}$ は SP をもつこと」と定義される。 $R(f)$ が C^1 -安定的擬軌道尾行性をもてば、 C^1 -位相に関し f に近い任意の g に対して、 g の全ての周期点が双曲型であることが示され、林の結果より $R(f) = \Omega(f)$ は双曲的であることが証明される (逆も成立する)。

今、 C_f を f の 1 つの鎖成分とする。もし、

C^1 -位相に関し f に近い任意の g に対し、 g の鎖成分 C_g が一意的に存在すれば、 C_f に対しても C^1 -安定的擬軌道尾行性の定義が可能である。さらに、その対応 $f \rightarrow C_f$ が上半連続であれば、鎖回帰集合の場合とほとんど同様にして C_f の双曲性が証明される。しかし、鎖成分については C_g の存在の一意性は期待できない。実際、Newhouse 現象のように、一般に f を摂動した場合 C_f は無限個の鎖成分に細分されてしまう。そこで本研究では、双曲型周期点を含む鎖成分を研究対象とした。

まず、点 p を f の双曲型周期点とすると、Hartman 定理より C^1 -位相に関し f に近い任意の g に対し (p の近くに) 双曲型周期点 p_g が一意的に存在する。そして、双曲型周期点 p を含む鎖成分 $C_f(p)$ が C^1 -安定的擬軌道尾行性をもつことを、「 C^1 -位相に関し f に近い任意の g に対し、 g の $C_g(p_g)$ における制限は SP をもつこと」と定義した。ただし、 $C_g(p_g)$ は p_g を含む g の鎖成分である。次に、 C^1 -安定的擬軌道尾行性をもつ $C_f(p)$ を、双曲的な $H_f(p)$ として特徴付けを推進した。証明に向けてのステップは以下の通り (Mane により開発された、双曲性を示すための一連の方法を踏襲した)。具体的には、 C^1 -安定的擬軌道尾行性の仮定のもと、次の手順で研究を進めた。

- ① $C_f(p)$ 上の接ベクトルバンドルにおける占有的分割 (dominated splitting) の存在を証明、
- ② $C_f(p)$ の任意の双曲型周期点の安定な固有空間の次元は一定であることを証明、
- ③ $C_f(p)$ の双曲型周期点についてのある種の一様双曲性を証明、そして最後に
- ④ $C_f(p)$ の双曲性を証明する。

以下、ステップごとの進捗と本研究における (平成 19 年度時点での) 課題について説明する。 $C_f(p)$ は C^1 -安定的擬軌道尾行性をもつとする。

①: 報告者は、任意の $f \in SP^r(M)$ に対し、任意の双曲型周期点の安定多様体・不安定多様体は横断的に交わることを示した。この証明方法を改良することにより、双曲型周期点 p のホモクリニック点も横断的であることが証明される。

$H_f(p) \subset C_f(p)$ は定義から、そして逆の包含関係は、任意の $x \in C_f(p)$ に対し、 $x \sim_f p$ であることより、SP を用いて証明される。 p のホモクリニック点 x における安定多様体 $W^s(x)$ 、不安定多様体 $W^u(x)$ の接平面は $C_f(p)$ 上の占有的分解の候補である。これらのなす角度が下からバウンドされることがわかり、

占有的分解の存在が証明される。

②: SP より、任意の双曲型周期点 $q \in C_f(p)$ に対し、 $W^s(w)(p) \cap W^u(s)(q) \neq \phi$ がわかる。もし、 q の安定な固有空間の次元が p のそれと異なるとすると、いずれか一方の交点は非横断的となる。この事実に報告者の研究 (I) において開発した技法を応用し、 C^1 -安定的擬軌道尾行性に矛盾することが証明される。

③: 周期点の双曲性が一様でないとする、絶対値が (いくらでも) 1 に近い固有値 λ をもつ双曲型周期点 $q \in C_f(p)$ が存在する。SP より $W^s(w)(p)$ と $W^u(s)(q)$ は横断的に交わることがわかる。 $|\lambda| \neq 1$ より、この横断的交わりを保存したまま f を摂動して、正規双曲的 (normally hyperbolic) g -不変曲線 I (または g -不変サークル C) を構成することができる。特に、 $g|_I = \text{identity}$ (または $g|_C = \text{rotation}$) となる。

$W^s(w)(p_g, g) \cap W^u(s)(q_g, g) \neq \phi$ より、 I (または C) は $C_g(p_g)$ に含まれ、更に正規双曲性より $g|_I$ (または $g|_C$) は SP をもつことがわかる。一方、identity や rotation 写像は SP をもたないことが知られていて、矛盾が導かれる。

以上より、①、②そして③の証明はすでに完了しており、平成 19 年度当初時点での本研究の課題は④であった。

④: $C_f(p)$ のすべての周期点が双曲型であることが証明できれば、①、②、③より $C_f(p)$ の双曲性が従う。周期点の双曲性の証明において我々が直面する最も困難な問題は、以下の条件 (★) の証明であった。

今、周期点 $q \in C_f(p)$ は双曲的とは限らないとする。もし、条件:

(★) p の近傍における f の任意の摂動 C^1 -位相 g に対し、常に $W^s(q, g) \cap W^u(p_g, g) \neq \phi$ かつ $W^u(q, g) \cap W^s(p_g, g) \neq \phi$ となる

が成立すれば $q \in C_g(p_g)$ が示され、SP から q の双曲性を導くことが可能となる。しかし、条件 (★) が成立しないと、一般に微かな摂動 g により $q \notin C_g(p_g)$ となり、 q を含む擬軌道に g の SP が適用できない。ここで、 $W^s(q, g)$ 、 $W^u(q, g)$ は、それぞれ単なる q の (g に関する) 安定集合、不安定集合である (多様体とは限らない)。

以下、条件 (★) をどのように証明したかについて説明する。平成 19 年度は、 $C_f(p)$ -芽拡大性 (germ expansivity) を仮定することにより、条件 (★) の証明を行った。方針としては、 $C_f(p)$ 上の占有的分解から構成される局所中心安定多様体・局所中心不安定多様体等、

f-不変な局所多様体の利用である。

$C_f(p)$ -芽拡大性を仮定することにより、(双曲型とは限らない) 周期点 q における局所中心安定多様体 $W^{cs}_\varepsilon(q)$, 局所中心不安定多様体 $W^{cu}_\varepsilon(q)$ が、「あたかも局所安定多様体, 局所不安定多様体のような性質をもつこと」が証明された。この事実により, 局所中心安定多様体・局所中心不安定多様体は p の不安定多様体, 不安定多様体とそれぞれ横断的に交わり, 摂動に対してもこの関係は保存され (つまり, 条件(★)が成立し) q の双曲性の証明ができた。

(2) 平成 20 年度: 研究の中心は $C_f(p)$ -芽拡大性の仮定を取り除くことであった。具体的には, 一般性についての結果と C^1 -安定的擬軌道尾行性との融合を図り条件(★)の証明に挑戦した。その証明の大まかな方針は, 次の通りである: 双曲型周期点の安定多様体・不安定多様体が互いに横断的に交わる微分同相写像は, C^1 -位相に関して稠密であること (Kupka-Smale の定理) や林氏による接続補題を利用し, まず, (i) C^1 -generic な微分同相写像 f に対し, f が C^1 -安定的擬軌道尾行性をもてば, $C_f(p)$ が双曲的であることを示す。次に, (ii) もう一度 C^1 -安定的擬軌道尾行性を利用し C^1 -generic の仮定を取り除く。

4. 研究成果

(1) 平成 19 年度においては $C_f(p)$ -芽拡大性を仮定することによりその双曲性が証明された(下記論文①, ②を参照)。

(2) 平成 20 年度は, $C_f(p)$ -芽拡大性の仮定を取り除くため, C^1 -一般性の範疇の下で, あるいは局所極大性の概念を導入することで $C_f(p)$ の双曲性を証明した(下記論文③を参照)。つい最近, 報告者の下記論文②の研究成果に Liao 理論を応用することにより, 北京大学のグループが C^1 -安定的擬軌道尾行性をもつ鎖成分 $C_f(p)$ の双曲性の証明に成功している(下記論文を参照)。これにより, 本研究の目的は完全に達成された。

X. Wen, S. Gan and L. Wen, *C^1 -stably shadowable chain components are hyperbolic*, J. Differential Equations 246 (2009), 340-357.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① K. Sakai, *C^1 -stably shadowable chain components for generic diffeomorphisms*, Far East J. Dynam. Syst. 9 (2007), 345-350.

② K. Sakai, *C^1 -stably shadowable chain components*, Ergodic Theory and Dynam. Sys. 28 (2008), 987-1029.

③ K. Lee, K. Moriyasu and K. Sakai, *C^1 -stable shadowing diffeomorphisms*, Discrete and Continuous Dynam. Syst. 22 (2008), 683-697.

[学会発表] (計 3 件)

① K. Sakai, C^1 stable shadowing property on chain components, The 7th AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, University of Texas at Arlington, Texas, USA (2008. 5. 19)

② K. Sakai, C^1 -stable weak shadowing chain components are partially hyperbolic, 2008 Int' l Workshop on Dynamical Systems and Related Topics, Chungnam National Univ., Daejeon, Korea (2008. 8. 20)

③ 酒井一博, Hyperbolicity of C^1 -stably shadowable chain components, 「双曲性を超えた位相力学系の新展開」研究集会, 京都大学数理解析研究所 (平成 20 年 10 月 1 日)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

酒井 一博 (SAKAI KAZUHIRO)

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号: 30205702

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし